Stage découverte C.P.G.E.

$\sum$ - Les sommes finies

M. Arnt

Table des matières

Partie A

La notation somme $\sum$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Définition et exemples

Définition 1.

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels. On note $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ la somme de tous les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n.$$

Exemple 1.

— $1000 \times 45 = \underbrace{45 + \ldots + 45}_{1000 \text{ termes}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{1000} 45\,;$

— $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \displaystyle\sum_{i=1}^{100} i.$

Remarque 1.

— Le nom de l'indice i qui varie dans la somme importe peu : c'est ce qu'on appelle une *variable muette*. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{\heartsuit=1}^{n} x_\heartsuit$$

— L'indice de la somme peut bien-sûr commencer en autre chose que 1. Par exemple,

$$5 + 6 + 7 + 8 + \ldots + 44 + 45 = \sum_{k=5}^{45} k$$

— Si l'indice de fin de somme est strictement inférieur à celui du début, on convient que la somme vaut 0. Par exemple $\displaystyle\sum_{j=3}^{2} x_j = 0$.

Exercice 1.

Exprimer les sommes suivantes grâce à la notation $\sum$:

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}$;
2. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{121}+\frac{1}{144}$;
3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}$;
4. $6+8+10+12+\ldots+898+900$.

Correction.

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{k}$;
2. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{121}+\frac{1}{144}=\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{i^2}$;
3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}=\sum_{j=0}^{10}\frac{1}{2^j}$;
4. $6+8+10+12+\ldots+898+900=\sum_{p=1}^{450}2p$.

2. Propriétés de la notation somme $\sum$

Dans ce paragraphe, $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ désignent des nombres réels.

a. Linéarité

Proposition 1.

Soit α un nombre réel. On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Démonstration.

Par définition, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i=\alpha x_1+\alpha x_2+\ldots+\alpha x_n.$$

Ainsi, en mettant α en facteur dans cette somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

□

Proposition 2.

On a :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Démonstration.

Par définition, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_n + y_n)\,.$$

Ainsi, en regroupant tous les $x_?$ à gauche et tous les $y_?$ à droite, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = (x_1 + \ldots + x_n) + (y_1 + \ldots + y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

□

Exercice 2.

Déduire des propositions 1 et 2 que pour α et β des nombres réels, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Correction.

D'après la proposition 2, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta y_i.$$

Puis, d'après la proposition 1, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta y_i = \beta \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Ainsi, il suit :

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

3. Exemples simples de changements d'indice

Dans ce paragraphe, $x_1, \ldots, x_n$ désignent des nombres réels.

Il arrive, pour des raisons que nous verrons dans la suite, que nous puissions avoir besoin de modifier la façon dont on énumère, en fonction de i, les éléments x_i dans une somme $\sum$. Pour cela, on effectue un **changement d'indice** pour obtenir une autre façon d'exprimer notre somme **sans en changer la valeur**.

Essayons de comprendre cela sur deux exemples :

Exemple 2.

— **Changement d'indice** $j = n - i$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{n-i} = x_n + \ldots + x_1 = x_1 + \ldots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

— **Changement d'indice** $j = i + 1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \underbrace{x_{0+1}}_{=x_1} + \underbrace{x_{1+1}}_{=x_2} + \ldots + \underbrace{x_{(n-2)+1}}_{=x_{n-1}} + \underbrace{x_{(n-1)+1}}_{=x_n} = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Partie B

Calculs de sommes finies

1. Sommes classiques

a. Somme des premiers entiers

Soit n un entier naturel. On cherche à calculer la somme des $n+1$ premiers entiers naturels i.e.

$$0+1+2+\ldots+n=\sum_{i=0}^{n} i.$$

Théorème 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

On peut démontrer ce résultat par récurrence lorsqu'on connaît déjà la formule. Mais si on ne la connaît pas, il faut faire preuve d'astuce... comme l'illustre mathématicien Karl Friedrich Gauss :

On note $S=\sum_{i=0}^{n} i$. On a :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + \ldots + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
+S & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + \ldots + & 2 & + & 1 & + & 0 \\
\hline
2S & = & n & + & n & + & n & + \ldots + & n & + & n & + & n
\end{array}$$

La somme $2S$ comportant $n+1$ termes, on en déduit $2S=(n+1)\times n$.
Ainsi, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} i=S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exercice 3.

On dit qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est une **suite arithmétique** de raison r un réel si, pour tout entier n, $u_{n+1}=u_n+r$.
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

1. En explicitant de deux façons la somme $\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})$, exprimer u_n en fonction de n, r et u_0.
2. En utilisant les propriétés de $\sum$ et le théorème 1, calculer, en fonction de n, r et u_0, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

b. Somme géométrique

Soit n un entier naturel et x un réel. On cherche à calculer la somme $n+1$ premières puissances de x i.e.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i.$$

On remarque premièrement que si $x = 1$, c'est très facile ! En effet, pour tout entier i, $1^i = 1$. Par suite, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} 1^i = \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1) \times 1 = (n+1).$$

Intéressons nous au cas $x \neq 1$:

Théorème 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 1$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Démonstration.

Calculons la quantité $(1-x)\sum_{i=0}^{n} x^i$. On a :

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{i=0}^{n} x^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) - x\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{n} \underbrace{x.x^i}_{=x^{i+1}} \qquad (*) \\
&= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n - \left(x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}\right) \\
&= 1 + \left(x + x^2 + \ldots + x^n\right) - \left(x + x^2 + \ldots + x^n\right) - x^{n+1} \\
&= 1 - x^{n+1}
\end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu également, à l'étape $(*)$, effectuer le changement de variable $j = i + 1$ dans la deuxième somme après en avoir extrait le dernier terme.

Par suite, on a :

$$(1-x)\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 - x^{n+1}.$$

Comme $x \neq 1$, on peut diviser la précédente égalité par le nombre réel non nul $(1-x)$ pour obtenir le résultat. $\square$

Exercice 4.

On dit qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est une **suite géométrique** de raison q un réel si, pour tout entier n, $u_{n+1} = qu_n$. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. On suppose, dans cet exercice, que $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$.

1. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
2. En calculant de deux façons le produit
$$\frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \ldots \times \frac{u_n}{u_{n-1}}$$
exprimer u_n en fonction de n, q et u_0.
3. En utilisant les propriétés de $\sum$ et le théorème 2, calculer, en fonction de n, q et u_0, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

c. Somme des premiers entiers au carré

Soit n un entier naturel. On cherche à calculer la somme des $n+1$ premiers entiers naturels chacun élevé au carré i.e.

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2.$$

Exercice 5.

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la formule du théorème suivant :

Théorème 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$