Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°1

1. Exercices basiques

a. Révisions Sup

Exercice 1.

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+3z=0\}$;
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+3z=2\}$;
3. $E_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x=y=2z=4t\}$;
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy=0\}$;
5. $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y=x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$;
7. $E_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$.

Exercice 2.

Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$;
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y) = (x+y, x-y, x+y).$$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Démontrer que

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \ker g.$$

Exercice 5.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 **2.** $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0 **4.** $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 **6.** $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 6.

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto \frac{e^x+e^{ax}-2}{x^2}$ admette une limite finie en 0. Déterminer alors la limite.

b. Chapitre fonctions convexes

Exercice 7.

Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que P soit sur le segment $[AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA, PB et AB.

Exercice 8.

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$. On pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx + (1-s)y;\ x \in C_1,\ y \in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 9.

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1 + C_2 = \{x+y;\ x \in C_1,\ y \in C_2\}$. Démontrer que $C_1 + C_2$ est convexe.

Exercice 10.

Discuter de la convexité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition ou sur certains sous-domaines :

1. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
2. $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. $x \mapsto cos(x)$.

Exercice 11.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a+e^b}{2}$.
2. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.

3. En déduire que $\forall a, b > 1,\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a . \ln b}$.

Exercice 12.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 13.

Soit X une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs et f une fonction convexe sur un intervalle contenant les valeurs prises par X.
Comparer $\mathbb{E}(f(X))$ et $f(\mathbb{E}(X))$.

2. Exercices d'entraînement

a. Révisions Sup

Exercice 14.

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (2, -2, 2),\ v_3 = (2, -1, 2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 15.

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(\sin x, \cos x)$;
2. $(\sin 2x, \sin x, \cos x)$;
3. $(\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x)$;
4. $(x, e^x, \sin(x))$.

Exercice 16.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2.** $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 17.

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$ **2**. $g(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

3. $h(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$ **4**. $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

b. Chapitre fonctions convexes

Exercice 18.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe et concave sur I si, et seulement si, f est une fonction affine.

Exercice 19. *Opérations sur les fonctions convexes*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions convexes sur I.

1. Que dire de $f+g$?
2. Que dire de $f-g$?
3. Que dire de fg ?
4. Que dire de $\max(f,g) := x \mapsto \max(f(x), g(x))$. ?
5. Que dire de $\min(f,g) := x \mapsto \min(f(x), g(x))$?
6. Si f est croissante et $\mathrm{Im}(g) \subset I$, que dire de $f \circ g$?

Exercice 20.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$, alors
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{1/n}.$$
3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$, alors
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 21.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$.

3. Exercices d'approfondissement

a. Chapitre fonctions convexes

Exercice 22.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 23.

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie de E

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est convexe. Que dire d'une intersection quelconque de parties convexes ? Que dire d'une réunion de convexes ?
2. Montrer qu'il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A. On appelle cet ensemble *enveloppe convexe* de a et on le note $\mathrm{Conv}(A)$.
3. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toute famille finies de points de A.