Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

1. Exercices basiques

a. Révisions Sup

Exercice 1.

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 2\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 4t\}$;
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$;
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$;
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$.

Correction.

1. Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ éléments de E_1. Alors, $X + X' = (x + x', y + y', z + z')$ est aussi élément de E_1. En effet,
$$(x + x') + (y + y') + 3(z + z') = (x + y + 3z) + (x' + y' + 3z') = 0.$$
De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ est élément de E_1 puisque
$$\lambda x + \lambda y + 3\lambda z = \lambda(x + y + 3z) = 0.$$
E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\vec{0} = (0, 0, 0)$ n'est pas élément de E_2.
3. Soient $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux éléments de E_3. Alors $X + X' = (x + x', y + y', z + z', t + t')$ est aussi élément de E_3. En effet,
$$x + x' = y + y' = 2z + 2z' = 2(z + z') = 4t + 4t' = 4(t + t').$$
De même, on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est élément de E_3. E_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X = (1, 0)$ et $Y = (0, 1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X + Y = (1, 1)$ n'est pas élément de E_4.
5. Les éléments $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0, 2)$ qui n'est pas élément de E_5 : E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est une droite passant par $(0, 0)$, ou $\mathbb{R}^2$ lui-même, ou encore le singleton $\{(0, 0)\}$. E_5 est une parabole et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

6. Posons $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$. Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F\cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
7. Cette fois, aucun théorème du cours ne dit qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel. Ici, prenons $(5,0,2)\in F\subset F\cup G$ et $(1,1,0)\in G\subset F\cup G$. Alors $(5,0,2)+(1,1,0)=(6,1,2)\notin G$ car $6-1+2=5\neq 0$. Ainsi, $F\cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, on prouve qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

Exercice 2.

Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

1. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$;
2. $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$.

Correction.

1. On a
$$(x,y,z)\in F \iff x=-2y+z \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y\times -2+z\times 1\\ y &=& y\times 1+z\times 0\\ z &=& y\times 0+z\times 1.\end{array}\right.$$
Posant $u_1=(-2,1,0)$ et $u_2=(1,0,1)$, on a donc $F=\mathrm{vect}(u_1,u_2)$. Cette solution n'est (bien sûr !) pas unique.
2. On a
$$(x,y,z)\in G \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0\\ 2x-y-z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0\\ y-3z &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{r} x=2z\\ y=3z\\ z=z\end{array}\right.$$
On a donc $G=\mathrm{vect}(u)$, avec $u=(2,3,1)$.

Exercice 3.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$f(x,y)=(x+y,x-y,x+y).$$
Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective ? surjective ?

Correction.

Commençons par déterminer le noyau de f. $(x,y)\in\ker f$ si et seulement si $f(x,y)=(0,0)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ 2x & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que $\ker(f)=\{(0,0)\}$, et en particulier que f est injective. Déterminons maintenant l'image de f. Un vecteur (u,v,w) est dans l'image de f si et seulement si

$$\begin{array}{rcl} \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (u,v,w)=f(x,y) & \iff & \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} u & = & x+y \\ v & = & x-y \\ w & = & x+y \end{array}\right. \\ & \iff & \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} u & = & x+y \\ u+v & = & 2x \\ w-u & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{rcl} \frac{u-v}{2} & = & y \\ \frac{u+v}{2} & = & x \\ w-u & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(f)=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3;\ u-w=0\}$. En particulier, $(1,1,0)$ n'est pas dans $\mathrm{Im}(f)$, et donc f n'est pas surjective.

Exercice 4.

Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. Démontrer que

$$g\circ f=0 \iff \mathrm{Im} f\subset \ker g.$$

Correction.

Supposons d'abord que $g\circ f=0$, et prenons $y\in\mathrm{Im} f$. Alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. Mais alors, $g(y)=g\circ f(x)=0$, et donc $y\in\ker g$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im} f\subset\ker g$. Alors, pour tout $x\in E$, $f(x)\in\mathrm{Im} f\subset\ker g$, et donc $g(f(x))=0$, prouvant que $g\circ f=0$.

Exercice 5.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x}-e^x$ à l'ordre 3 en 0

2. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x\cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0

4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0

6. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Correction.

1. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+o(x^3)\\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x}-e^x=\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\\ \sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\\ \cos(2x) &= 1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par x, et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit

$$\sin(x)\cos(2x)=x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121x^5}{120}+o(x^6).$$

4. On écrit les développements limités

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\end{aligned}$$

et on effectue le produit pour trouver

$$(\cos x)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).$$

5. C'est la même méthode, encore plus facile car $1+x^3=1+x^3+o(x^3)$. Puisque d'autre part

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)$$

on trouve en effectuant le produit

$$(1+x^3)\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{15x^3}{16}+o(x^3).$$

6. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
on trouve
$$\big(\ln(1+x)\big)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4).$$

Exercice 6.

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto \frac{e^x+e^{ax}-2}{x^2}$ admette une limite finie en 0. Déterminer alors la limite.

Correction.

On effectue un développement limité à l'ordre 2 du numérateur. On trouve

$$\begin{aligned} e^x + e^{ax} - 2 &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2 \\ &= (1+a)x + \frac{1+a^2}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Si $a \neq -1$, alors la fonction est équivalente, au voisinage de 0, à $\frac{(1+a)x}{x^2} = \frac{1+a}{x}$. Elle n'admet donc pas de limite finie en 0. Si $a = -1$, alors elle est équivalente à $\frac{x^2}{x^2} = 1$. Elle admet donc 1 comme limite en 0.

b. Chapitre fonctions convexes

Exercice 7.

Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que P soit sur le segment $[AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA, PB et AB.

Correction.

Il suffit de remarquer que
$$\overrightarrow{PB} = \frac{PB}{AB}\overrightarrow{AB}$$
et que
$$\overrightarrow{PA} = -\frac{PA}{AB}\overrightarrow{AB}.$$
Ceci donne
$$PB \cdot \overrightarrow{PA} + PA \cdot \overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$
Ainsi, P est le barycentre de (A, BP) et de (B, AP).

Exercice 8.

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$. On pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx + (1-s)y;\ x \in C_1,\ y \in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Correction.

Soit $z_1, z_2 \in C$ et $t \in [0,1]$. Alors il existe $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$ tels que

$$z_1 = sx_1 + (1-s)y_1,\ z_2 = sx_2 + (1-t)y_2.$$

Mais alors

$$tz_1 + (1-t)z_2 = s(tx_1 + (1-t)x_2) + (1-s)(sy_1 + (1-s)y_2).$$

Par convexité respective de C_1 et C_2, $tx_1 + (1-t)x_2 \in C_1$ tandis que $ty_1 + (1-t)y_2 \in C_2$. On en déduit que C est bien une partie convexe de E.

Exercice 9.

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1 + C_2 = \{x + y;\ x \in C_1,\ y \in C_2\}$. Démontrer que $C_1 + C_2$ est convexe.

Correction.

Soit $z_1 \in C_1$, $z_2 \in C_2$ et $t \in]0,1[$. Alors $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$. On a alors $(1-t)z_1 + tz_2 = (1-t)x + ty$ avec $x = (1-t)x_1 + tx_2 \in C_1$ et $y = (1-t)y_1 + ty_2 \in C_2$ par convexité respective de C_1 et C_2. Ainsi, $C_1 + C_2$ est convexe.

Exercice 10.

Discuter de la convexité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition ou sur certains sous-domaines :

1. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$
2. $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. $x \mapsto cos(x)$.

Exercice 11.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a + e^b}{2}$.
2. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire que $\forall a, b > 1,\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a . \ln b}$.

Correction.

1. Il suffit juste de remarquer que la fonction exponentielle est convexe, et d'appliquer la définition de la convexité avec $\lambda = 1/2$.
2. On calcule la dérivée seconde de f qui vaut :
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln(x)} - \frac{1}{x^2 \ln^2(x)}.$$
Cette fonction est négative sur $]1, +\infty[$. Donc la fonction est concave.
3. Par concavité de f, on a :
$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}(\ln\ln a + \ln\ln b) = \ln\left(\sqrt{\ln a \ln b}\right).$$
Passer à l'exponentielle donne le résultat.

Exercice 12.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Correction.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors on a par convexité de f :
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$
Par croissance de g, on en déduit que
$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq g\big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big).$$
La convexité de g permet de conclure à
$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g \circ f(x) + (1-\lambda)g \circ f(y)$$
ce qui signifie bien que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 13.

Soit X une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs et f une fonction convexe sur un intervalle contenant les valeurs prises par X.

Comparer $\mathbb{E}(f(X))$ et $f(\mathbb{E}(X))$.

Correction.

Notons $x_1, ..., x_n$ les $n \in \mathbb{N}^*$ valeurs prises par X et $p_1, ..., p_n$ leurs probabilités respectives. On a, par définition, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ et f est convexe, donc, d'après l'inégalité de Jensen :

$$f(\mathbb{E}(X)) = f(\sum_{i=1}^n p_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) = \mathbb{E}(f(X)).$$

2. Exercices d'entraînement

a. Révisions Sup

Exercice 14.

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (2, -2, 2),\ v_3 = (2, -1, 2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Correction.

1. On a $v_2 = 2v_1$. La famille (v_1, v_2) est donc liée. Quel que soit le vecteur w, la famille (v_1, v_2, w) restera liée, puisqu'on aura toujours $2v_1 - v_2 + 0w = 0$, combinaison linéaire dont qui n'a pas tous ses coefficients nuls.
2. A contrario, la famille (v_1, v_3) est libre. Pour $w = (1, 0, 0)$, il est facile de voir que la famille (v_1, v_3, w) est libre. En effet, si $av_1 + bv_3 + cw = 0$, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + 2b + c &=& 0\\ -a - b &=& 0\\ a + 2b &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a + 2b + c &=& 0\\ -a - b &=& 0\\ 3b &=& 0 \end{array}\right.$$

   d'où on tire $a = b = c = 0$ et la famille est libre. Quand on connait la théorie de la dimension, on sait que l'on peut compléter la famille libre (v_1, v_3) grâce au théorème de la base incomplète, qui nous dit qu'on peut compléter la famille libre à deux vecteurs (v_1, v_3) pour en faire une base (à trois vecteurs) de $\mathbb{R}^3$. De plus, on peut choisir le vecteur qui complète dans n'importe quel système générateur de $\mathbb{R}^3$. Le plus naturel est bien entendu la base canonique.

Exercice 15.

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(\sin x, \cos x)$;
2. $(\sin 2x, \sin x, \cos x)$;
3. $(\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x)$;
4. $(x, e^x, \sin(x))$.

Correction.

1. Si on a une relation de liaison de la forme $a\cos x + b\sin x = 0$, alors on l'évalue en $x = 0$ et on trouve $a = 0$. Puis en évaluant en $x = \pi/2$, on trouve $b = 0$. La famille est libre.
2. Si on a une relation de liaison de la forme $a\cos x + b\sin x + c\sin(2x) = 0$, alors on l'évalue en $x = 0$ pour trouver $a = 0$, puis en $x = \pi/2$ pour trouver $b = 0$. On en déduit que $c = 0$. La famille est donc libre. Il faut prendre garde ici à ce que la formule de trigonométrie
$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
n'entraîne pas que $\sin(2x)$ est une combinaison linéaire de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
3. On a
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
qui prouve que $\cos(2x)$ est une combinaison linéaire de $\cos^2 x$ et de $\sin^2 x$. La famille est donc liée.
4. Si on a une relation de liaison du type
$$ax + be^x + c\sin(x) = 0,$$
alors on met e^x en facteur et on trouve :
$$axe^{-x} + b + c\sin(x)e^{-x} = 0.$$
On fait tendre x vers $+\infty$ et le membre de gauche tend vers b qui doit donc être nul. On a alors
$$ax + c\sin x = 0.$$
Si $a \neq 0$, le membre de gauche tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $+\infty$. C'est donc que $a = 0$. On en déduit $c = 0$ et la famille est libre.

Exercice 16.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2.** $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

Correction.

1. La fonction arccos est dérivable en 0, et sa dérivée vaut
$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Cette fonction est de classe C^∞ autour de 0, elle admet au moins un développement limité à l'ordre 4 en 0. Pour le calculer, on commence par écrire que
$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4).$$
Posons $u = x^2 + x^4 + o(x^4)$ et remarquons que $u^2 = x^4 + o(x^4)$. Du développement limité

de $\sqrt{1+u}$,

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2),$$

on déduit que

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

On intègre ce développement limité. Tenant compte de $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

2. La méthode est similaire. On remarque que

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

En intégrant, on trouve que

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5).$$

Exercice 17.

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$ **2.** $g(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

3. $h(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$ **4.** $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

Correction.

1. Remplaçons les cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques par leur développement en fonction de l'exponentielle. On obtient

$$f(x) = \frac{xe^x - e^x + xe^{-x} + e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 2}.$$

On met en facteur e^x, d'où

$$f(x) = \frac{x - 1 + xe^{-2x} + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}.$$

Ce qui nous intéresse, ce sont les termes en x et les termes constants. On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{x - 1 + o(1)}{1 + o(1)}.$$

Il vient

$$f(x) = x - 1 + o(1).$$

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. Si on cherche en plus la position par rapport à l'asymptote, on doit pousser un cran plus loin. On trouve

$$f(x) = \frac{x - 1 + o(e^{-x})}{1 - 2e^{-x} + o(e^{-x})} = (x - 1 + o(e^{-x}))(1 + 2e^{-x} + o(e^{-x}) = (x - 1) + 2xe^{-x} + o(e^{-x}).$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

2. Posons $u = 1/x$. Pour $x \to +\infty$, u est voisin de 0. On a

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

soit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-3})\right) \\ &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, la droite d'équation $y = x - 1/2$ est asymptote à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$ et la courbe est au-dessus de son asymptote (au voisinage de l'infini).

3. On pose encore $u = 1/x$, et on obtient

$$h(x) = \frac{1 + \frac{1}{u}}{1 + e^u} = \frac{1 + 1/u}{2 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)}.$$

On calcule alors le développement limité avec les techniques usuelles et on trouve que

$$h(x) = \frac{1}{2u} + \frac{1}{4} - \frac{u}{4} + o(u) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de h, et la courbe est sous son asymptote (au voisinage de l'infini).

4. On effectue un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que :

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Il vient :

$$\begin{aligned} x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) &= x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La droite d'équation $y = x + 2$ est donc asymptote à la courbe représentative de u au voisinage de $+\infty$, et la courbe est située au-dessus de son asymptote.

b. Chapitre fonctions convexes

Exercice 18.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe et concave sur I si, et seulement si, f est une fonction affine.

Correction.

— ($\Rightarrow$). On suppose f convexe et concave sur I.
Soit $x_0 \in I$. Alors la fonction $\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante et décroissante sur $I \smallsetminus \{x_0\}$ et donc τ_{x_0} est constante sur $I \smallsetminus \{x_0\}$. Par suite, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I \smallsetminus \{x_0\}$, $\tau_{x_0}(x) = a$, d'où, pour tout $x \in I \smallsetminus \{x_0\}$:

$$f(x) = a(x - x_0) + f(x_0).$$

En remarquant que l'égalité précédente est également valable en $x = x_0$, on en conclut que f est affine.

— ($\Leftarrow$). On suppose que f est affine. La fonction f vérifie le cas d'égalité dans les définitions des fonctions convexe/concave d'où le résultat.

Exercice 19. *Opérations sur les fonctions convexes*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions convexes sur I.

1. Que dire de $f + g$?
2. Que dire de $f - g$?
3. Que dire de fg ?
4. Que dire de $\max(f, g) := x \mapsto \max(f(x), g(x)).$?
5. Que dire de $\min(f, g) := x \mapsto \min(f(x), g(x))$?
6. Si f est croissante et $\mathrm{Im}(g) \subset I$, que dire de $f \circ g$?

Correction.

Soit $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, par convexité, on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \text{ et } g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y);$$

1. En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$(f + g)(tx + (1-t)y) \leq t(f + g)(x) + (1-t)(f + g)(y).$$

Donc $f + g$ est convexe sur I.

2. Ce n'est plus vrai en général pour $f - g$. Prendre, par exemple, la fonction nulle pour f et pour g une fonction strictement convexe (i.e. l'inégalité de la définition est stricte) ; le résultat sera strictement concave et donc non convexe.

3. fg n'est pas convexe en général : prendre $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$.

4. On pose $h = \max(f, g)$. On a alors $f(x) \leq h(x)$ et $f(y) \leq h(y)$, donc, du fait que t et $(1-t)$ sont positifs,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq th(x) + (1-t)h(y),$$

et de la même façon,

$$g(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y) \leq th(x)+(1-t)h(y).$$

Par suite,

$$h(tx+(1-t)y) = \max(f(tx+(1-t)y), g(tx+(1-t)y)) \leq th(x)+(1-t)h(y).$$

Donc h est convexe sur I.

5. Ce n'est plus vrai en général pour l'inf : prendre $f : x \mapsto x$ et g la fonction nulle.
6. Par croissance de f, on a :

$$f\left(g(tx+(1-t)y)\right) \leq f\left(tg(x)+(1-t)g(y)\right),$$

Or $g(x), g(y) \in I$ donc, par convexité de f :

$$f \circ g(tx+(1-t)y) \leq tf \circ g(x) + (1-t) f \circ g(y).$$

Par suite, $f \circ g$ est convexe.

Exercice 20.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$, alors

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right)^{1/n}.$$

3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$, alors

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Correction.

1. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est $x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ qui est une fonction positive.
2. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. La convexité de f entraîne que

$$\ln\left(1+e^{\frac{a_1+\dots+a_n}{n}}\right) \leq \frac{\ln\left(1+e^{a_1}\right)+\dots+\ln\left(1+e^{a_n}\right)}{n}$$

ce qui par les propriétés fonctionnelles des fonctions logarithme et exponentielle donne

$$\ln\left(1+\left(\prod_{k=1}^{n} e^{a_k}\right)^{1/n}\right) \leq \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n}(1+e^{a_k})\right)^{1/n}\right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit

$$1+\left(\prod_{k=1}^{n} e^{a_k}\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+e^{a_k})\right)^{1/n}.$$

C'est exactement le résultat voulu, pourvu que l'on choisisse $a_k = \ln x_k$.

3. En factorisant, on trouve

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}\left(1+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right).$$

On applique l'inégalité de la fonction précédente à $x_k = b_k/a_k$, et on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

Il suffit de tout mettre au dénominateur dans le dernier terme pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 21.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$.

Correction.

Soit $y_1, y_2 \in f(I)$ et $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Soit aussi $t \in [0,1]$. Alors

$$f^{-1}\big(ty_1+(1-t)y_2\big) = f^{-1}\big(tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\big).$$

Par convexité de f,

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \geq f(tx_1+(1-t)x_2).$$

Puisque f^{-1} est croissante (la réciproque d'une fonction croissante est croissante), on en déduit que

$$f^{-1}\big(ty_1+(1-t)y_2\big) \geq f^{-1}\big(f(tx_1+(1-t)x_2)\big) = tx_1+(1-t)x_2 = tf^{-1}(y_1)+(1-t)f^{-1}(y_2).$$

Ainsi, f^{-1} est concave.

3. Exercices d'approfondissement

a. Chapitre fonctions convexes

Exercice 22.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Correction.

Soit $x_0 \in I$. On va démontrer que f est continue à droite en x_0. La preuve serait identique pour la continuité à gauche. Prenons $a < x_0$ et $b > x_0$ tels que $a, b \in I$. Alors, d'après l'inégalité des pentes, pour tout $x \in]x_0, b]$, on a

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

ce qui donne

$$(x - x_0)\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Le résultat devient faux si $I = [0, 1]$ par exemple. En effet, la fonction non continue en 0 et en 1 définie par $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe.

Exercice 23.

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie de E

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est convexe. Que dire d'une intersection quelconque de parties convexes ? Que dire d'une réunion de convexes ?
2. Montrer qu'il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A. On appelle cet ensemble *enveloppe convexe* de a et on le note $\mathrm{Conv}(A)$.
3. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toute famille finies de points de A.

Correction.

1. Soit A_1, A_2 deux parties convexes de E. Soit $u, v \in A_1 \cap A_2$. Alors, par convexité, $[u, v] \subset A_1$ et $[u, v] \subset A_2$; donc $[u, v] \subset A_1 \cap A_2$. Par suite $A_1 \cap A_2$ est convexe.

   Il en est de même dans le cas général : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de convexe où I est un ensemble d'indice quelconque. Soit $u, v \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Alors, par convexité, pour tout $i \in I$, $[u, v] \subset A_i$. Donc $[u, v] \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.

   Concernant la réunion de deux convexes, le résultat n'est pas convexe en général : prendre deux singletons distincts par exemple dans un espace vectoriel de dimension au moins 1.
2. Soit C l'intersection de tous les convexes contenant A. Alors C est convexe d'après la ques-

tion précédente et il contient A. Or si C' est un convexe contenant A, alors par définition, on a $C \subset C'$. Donc C est le plus petit convexe contenant a pour l'inclusion.

3. Soit Γ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A.
   — Alors A est inclus dans Γ (il suffit de voir chaque point a de A comme le barycentre de $(a, 1)$ par exemple). Montrons que de plus Γ est convexe.
   Soit $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $g' = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ appartenant à Γ (on a supposé, quitte à diviser par les sommes de pondérations respectives, que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$).

     Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, $tg+(1-t)g' = \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{m} (1-t)\mu_i y_i$ est le barycentre à coefficients positifs de la famille de points de A pondérés $((x_1, t\lambda_1), ..., (x_n, t\lambda_n), (y_1, (1-t)\mu_1), ..., (y_m, (1-t)\mu_m))$ (il faut aussi remarquer que $t1 + (1-t)1 = 1$), donc, par définition, c'est un élement de Γ. Par suite, Γ est convexe.

     Il en résulte que $\mathrm{Conv}(A) \subset \Gamma$.

   — On a $A \subset \mathrm{Conv}(A)$ donc tout élément Γ est en particulier un barycentre de points de $\mathrm{Conv}(A)$. Or $\mathrm{Conv}(A)$ est convexe, donc d'après la caractérisation des convexes par les barycentres, tout barycentre à coefficients positifs de points de $\mathrm{Conv}(A)$ est dans $\mathrm{Conv}(A)$. Il en résulte que $\Gamma \subset \mathrm{Conv}(A)$.

   On en conclut que $\mathrm{Conv}(A) = \Gamma$.