# Feuille d'exercices n°2

## 1. Exercices basiques

### a. Normes

**Exercice 1.**

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit $N_1$ et $N_2$ par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

Démontrer que $N_1$ et $N_2$ sont deux normes sur $E$.

**Exercice 2.**

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \;\; N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Démontrer que $N$ et $N'$ sont deux normes sur $E$.

**Exercice 3.**

Soit $E$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes. On considère l'application $\|\cdot\|$ définit par :

$$\text{pour } u = (u_n) \in E, \qquad \|u\| = \lim_{n\to\infty} |u_n|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur $E$ i.e. $\|.\|$ vérifie tous les axiomes d'une norme excepté l'axiome de séparation.
2. Donner un exemple de suite qui ne satisfait pas à l'axiome de séparation.

**Exercice 4.**

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $(E,N)$ est un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$ et $B(x,r)$ est la boule de centre $x$ et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x,r) = B(x,\lambda r)$.
2. $N : (x,y) \mapsto |5x+3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $x,y$ deux vecteurs de $E$ tels que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors $x \in \text{vect}(y)$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur $E$.

5. Si $N_1$ et $N_2$ sont deux normes équivalentes sur $E$, et si on note $B_1 = \{x \in E;\ N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E;\ N_2(x) \leq 1\}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $aB_1 \leq B_2 \leq bB_1$.
6. Soit $(u_n)$ une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit $\ell \in E$. Alors $(u_n)$ converge vers $\ell$ si et seulement si $(\|u_n - \ell\|)$ tend vers 0.
7. Une suite $(u_n)$ de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ converge si et seulement si toute suite extraite de $(u_n)$ converge.

**Exercice 5.**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a
$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$
En déduire que
$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$
La constante 2 peut elle être améliorée ?
2. On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a
$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$
En déduire que
$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$
La constante $\sqrt{2}$ peut elle être améliorée ?

**Exercice 6.**

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les $a_k$ pour que $N$ soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 7.**

Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un espace vectoriel $E$. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Démontrer que $N$ est une norme sur $E$.

**Exercice 8.**

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

### b. Boules/Distances

**Exercice 9.**

On considère l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Déterminer la distance de la suite $u$ constante en 1 au sous-espace vectoriel $c_0(\mathbb{R})$ des suites à valeurs réelles convergeant vers 0.
2. Déterminer la distance de la suite $v = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites à valeurs réelles convergentes.

**Exercice 10.**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x, y \in E$. Démontrer que $x + B_f(y,r) = B_f(x+y,r)$.
*Remarque :* $x + B_f(y,r)$ est l'ensemble $\{x + z \mid z \in B_f(y,r)\}$.

## 2. Exercices d'entraînement

### a. Normes

**Exercice 11.**

Pour tout $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Démontrer que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 12.**

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $N$ la norme associée.
2. Démontrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

### b. Boules/Distances

**Exercice 13.**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$ et $x, x' \in E$ et $r, r' \in R_+^*$.
Montrer $B_f(x,r) = B_f(x',r')$ si, et seulement si, $x = x'$ et $r = r'$.

*Indication.*

Une implication est évidente, montrer l'implication réciproque par contraposée en commençant par le cas : $x = x'$ et $r \neq r'$.
Ensuite, dans le cas $x \neq x'$, faire un dessin !

**Exercice 14.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$, on note $\bar{B}(a,r)$ la boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$. On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

1. On suppose que $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,s)$. Démontrer que $\|a-b\| \leq s - r$.
2. On suppose que $\bar{B}(a,r) \cap \bar{B}(b,s) = \varnothing$. Montrer que $\|a-b\| > r + s$.

## 3. Exercices d'approfondissement

### a. Normes

**Exercice 15.** $(*)$ *Les normes $p$ sur $\mathbb{R}^n$, pour $1 < p < +\infty$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. En déduire que, pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{q}};$$

   puis montrer que cette dernière inégalité est toujours vraie quand $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$.

   Cette inégalité est connue sous le nom de **Inégalité de Hölder**.

3. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'**inégalité de Minkowski**, i.e. pour tous

$x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}_+$ :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'application de $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 16.**

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions $A$ doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur $\mathbb{R}[X]$ ?