

Corrigé de la feuille d'exercices n°2

1. Exercices basiques**a. Normes****Exercice 1.**

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E .

Correction.

On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,

$$|(P + Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda|N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P , ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2 . On a, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$|(P + Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

En passant au sup pour $t \in [-1, 1]$, on en déduit que

$$N_2(P + Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda|N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E .

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Démontrer que N et N' sont deux normes sur E .

Correction.

Remarquons d'abord que N est à valeurs dans \mathbb{R}_+ et prenons $f, g \in E$. Alors on a $N(f) = 0$ si et seulement si $f(0) = 0$ et $f' \equiv 0$. La deuxième condition entraîne que f est constante sur $[0, 1]$ et la première que f est identiquement nulle. De plus, on a clairement $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$ et

$$N(f + g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g).$$

N est une norme, et la preuve est identique, mais plus simple, pour N' .

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans \mathbb{K} convergentes. On considère l'application $\|\cdot\|$ défini par :

$$\text{pour } u = (u_n) \in E, \quad \|u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur E i.e. $\|\cdot\|$ vérifie tous les axiomes d'une norme excepté l'axiome de séparation.
2. Donner un exemple de suite qui ne satisfait pas à l'axiome de séparation.

Correction.

1. Soit $u = (u_n), v = (v_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $U = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|$ et $V = \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|$.

- *Positivité* $\|u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |U| \geq 0$.
- *Homogénéité* $\|\lambda u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda u_n| = |\lambda|U = |\lambda|\|u\|$.
- *Inégalité triangulaire*

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n + v_n| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n| + |v_n|) \\ &\leq |U| + |V| = \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

2. *Séparation non vérifiée* : Une suite qui converge vers 0 a une "norme" égale à 0 ! Or si elle possède au moins un terme non nul (on peut prendre par exemple $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$), elle est différente de la suite constante en 0 (qui constitue le vecteur nul de E). Donc l'axiome de séparation n'est pas vérifié.

Exercice 4.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$ et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.
2. $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et x, y deux vecteurs de E tels que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors $x \in \text{vect}(y)$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E .
5. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E , et si on note $B_1 = \{x \in E; N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E; N_2(x) \leq 1\}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $aB_1 \leq B_2 \leq bB_1$.
6. Soit (u_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit $\ell \in E$. Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $(\|u_n - \ell\|)$ tend vers 0.

7. Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ converge si et seulement si toute suite extraite de (u_n) converge.

Correction.

- Non! $\lambda B(x, r) = B(\lambda x, \lambda r)$ et la formule proposée ne fonctionne que si $x = 0$.
- Posons $y = 5$ et $x = -3$. Alors $5x + 3y = 0$, d'où $N(-3, 5) = 0$ sans que $(-3, 5)$ ne soit le vecteur nul. N n'est pas une norme!
- On va donner un contre exemple avec $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Prenons en effet $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$. Alors $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x + y\|_\infty = 2$ alors que (x, y) est libre.
- Oui. La seule difficulté est de montrer que $N(P) = 0 \implies P = 0$. Mais si P est un polynôme de degré un (donc une fonction affine) qui s'annule en 0 et en 1, alors P est identiquement nul.
- C'est vrai! Si N_1 et N_2 sont équivalentes, il existe $c, d > 0$ tels que $cN_1 \leq N_2 \leq dN_1$. Prenons $x \in B_2$. Alors $N_2(x) \leq 1 \implies N_1(x) \leq \frac{1}{c} \implies x \in \frac{1}{c}B_1$. D'où la première inclusion avec $b = \frac{1}{c}$. L'autre inclusion se montre de façon similaire.
- C'est vrai, et c'est une conséquence facile de la définition de la convergence d'une suite.
- Le sens direct est du cours. Pour la réciproque, il suffit de remarquer que (u_n) est une suite extraite d'elle-même.

Exercice 5.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante 2 peut elle être améliorée?

2. On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante $\sqrt{2}$ peut elle être améliorée?

Correction.

1. On écrit

$$x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)$$

de sorte que, par l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leq \frac{1}{2} (\|x + y\| + \|x - y\|).$$

De même, on a

$$\|y\| \leq \frac{1}{2} (\|x + y\| + \|x - y\|)$$

et en sommant les deux inégalités, on a l'inégalité demandé. Puisque $\|x + y\| \leq \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$ et que $\|x - y\| \leq \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$, on a finalement aussi

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante 2 ne peut pas être améliorée, car elle est parfois atteinte avec $\|x\| \neq 0$ et $\|y\| \neq 0$. C'est le cas en effet par exemple pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ lorsque $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dont est issu la norme. Alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle,$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &\geq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Puisque $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \leq 2 \max(\|x + y\|^2, \|x - y\|^2)$, on obtient bien la deuxième inégalité demandée. Enfin, la constante $\sqrt{2}$ ne peut pas être améliorée. Elle est atteinte sur \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique lorsque $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

Exercice 6.

Soient a_1, \dots, a_n des réels et $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que N soit une norme sur \mathbb{R}^n .

Correction.

Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors si N est une norme, on sait que $N(e_k) = a_k > 0$, et donc il est nécessaire que tous les a_k soient strictement positifs. Cette condition est également suffisante. En effet, N est alors bien à valeurs dans \mathbb{R}_+ , il est clair que l'on a $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ et que, si $N(x) = 0$, alors

$$a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n| = 0 \implies x = 0$$

puisqu'on somme à gauche des éléments qui sont tous positifs. Leur somme étant nulle, chacun des éléments doit être nul. Enfin, l'inégalité triangulaire se prouve simplement comme pour la

norme $\|\cdot\|_1$. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned}N(x+y) &= a_1|x_1+y_1| + \cdots + a_n|x_n+y_n| \\ &\leq a_1(|x_1|+|y_1|) + \cdots + a_n(|x_n|+|y_n|) \\ &\leq a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n| + a_1|y_1| + \cdots + a_n|y_n| \\ &\leq N(x) + N(y).\end{aligned}$$

Exercice 7.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E . On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E .

Correction.

On vérifie les trois propriétés définissant une norme (on remarque que N est bien à valeurs dans \mathbb{R}_+). D'une part, si $N(x) = 0$, alors $N_1(x) = 0$ et donc $x = 0$ puisque N_1 est une norme. Ensuite, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}N(\lambda x) &= \max(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)) \\ &= \max(|\lambda|N_1(x), |\lambda|N_2(x)) \\ &= |\lambda| \max(N_1(x), N_2(x)) \\ &= |\lambda|N(x).\end{aligned}$$

Enfin, prouvons l'inégalité triangulaire pour N . En effet, si x et y sont dans E , alors d'une part

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \leq N(x) + N(y)$$

et d'autre part

$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \leq N(x) + N(y).$$

En passant au maximum, on obtient bien

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Exercice 8.

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Correction.

La démonstration du fait qu'il s'agit d'une norme est une simple modification du cas classique de la norme infinie dans \mathbb{R}^p . On peut d'ailleurs procéder par isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^{n^2} . Montrons qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, en prenant $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en posant $C = AB$. Écrivons $C = (c_{i,j})$. On a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$. On a donc :

$$\begin{aligned} n|c_{i,j}| &\leq n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \\ &\leq n \sum_{k=1}^n \frac{N(A)}{n} \frac{N(B)}{n} \\ &\leq N(A)N(B). \end{aligned}$$

b. Boules/Distances

Exercice 9.

On considère l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Déterminer la distance de la suite u constante en 1 au sous-espace vectoriel $c_0(\mathbb{R})$ des suites à valeurs réelles convergent vers 0.
2. Déterminer la distance de la suite $v = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel \mathcal{C} des suites à valeurs réelles convergentes.

Correction.

On note 0 la suite constante en 0.

— On a clairement $d(u, c_0(\mathbb{R})) \leq d(u, 0) = 1$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit $x = (x_n) \in c_0(\mathbb{R})$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - 1| \leq \|x - u\|_\infty.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$1 \leq d(u, x).$$

Donc $d(u, c_0(\mathbb{R})) \geq 1$.

Il en résulte que $d(u, c_0(\mathbb{R})) = 1$.

— On a clairement $d(v, \mathcal{C}) \leq d(v, 0) = 1$. Montrons l'inégalité réciproque.

Soit $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ et l sa limite. On a, pour tout entier pair $n = 2k$,

$$\|x - v\|_\infty \geq |x_{2k} - v_{2k}| = |x_{2k} - 1|,$$

et pour tout entier impair $n = 2k + 1$,

$$\|x - v\|_\infty \geq |x_{2k+1} - v_{2k+1}| = |x_{2k+1} + 1|.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$|l - 1| \leq d(v, x) \text{ et } |l + 1| \leq d(v, x).$$

Par suite,

$$1 = \left| \frac{1}{2}(1-l) + \frac{1}{2}(1+l) \right| \leq \frac{1}{2}|1-l| + \frac{1}{2}|1+l| \leq d(v, x).$$

Donc $d(v, \mathcal{C}) \geq 1$.

Il en résulte que $d(v, \mathcal{C}) = 1$.

Exercice 10.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x, y \in E$. Démontrer que $x + B_f(y, r) = B_f(x+y, r)$.

Remarque : $x + B_f(y, r)$ est l'ensemble $\{x+z \mid z \in B_f(y, r)\}$.

Correction.

On procède par double inclusion.

— $x + B_f(y, r) \subset B_f(x+y, r)$.

Soit $u \in x + B_f(y, r)$. Alors il existe $z \in B_f(y, r)$ tel que $u = x + z$. On a :

$$d(u, x+y) = \|(x+y) - (x+z)\| = \|y-z\| = d(z, y) \leq r.$$

Donc $u \in B_f(x+y, r)$.

— $x + B_f(y, r) \supset B_f(x+y, r)$.

Soit $u \in B_f(x+y, r)$. On note $z = u - x$. Alors $u = x + z$ et on a :

$$d(y, z) = \|(u-x) - y\| = \|u - (x+y)\| = d(x+y, u) \leq r.$$

D'où $z \in B_f(y, r)$ et donc $u \in x + B_f(y, r)$.

Il en résulte $x + B_f(y, r) = B_f(x+y, r)$.

2. Exercices d'entraînement

a. Normes

Exercice 11.

Pour tout $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Démontrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Correction.

On va démontrer que N est la norme issue d'un produit scalaire (remarquons que pour le moment, nous n'avons pas encore prouvé que N est toujours définie). Pour cela, on procède par polarisation, et pour $x = (a, b)$, $x' = (a', b')$, on pose

$$\phi(x, x') = aa' + a'b + ab' + 5bb'.$$

ϕ est clairement une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 , il reste à voir qu'elle est définie et positive. Mais on a

$$\phi(x, x) = a^2 + 2ab + 5b^2 = (a + b)^2 + 4b^2$$

(l'idée est ici de reconnaître dans $a^2 + 2ab$ le début du développement d'un carré). On en déduit que l'on a toujours $\phi(x, x) \geq 0$ et de plus, si $\phi(x, x) = 0$, alors on a $(a + b) = 0$ et $b = 0$, ce qui entraîne bien sûr $a = b = 0$. Ainsi, N est la norme associée au produit scalaire ϕ .

Exercice 12.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera N la norme associée.
2. Démontrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Correction.

1. Il est très facile de vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit une forme bilinéaire symétrique. Reste à démontrer qu'elle est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $(b_{i,j}) = A^T A$. Alors

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$

Ainsi,

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$

On a bien affaire à une forme positive. De plus, si $\langle A, A \rangle = 0$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $k = 1, \dots, n$, on a $a_{k,i} = 0$, et donc $A = 0$: la forme est définie.

2. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de sorte que $AB = (c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

On a alors

$$N(AB)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathbb{R}^n à la somme sur k . On en déduit

que

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{j,k} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{j,k}^2 \right) \\ &\leq N(A)N(B). \end{aligned}$$

b. Boules/Distances

Exercice 13.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$ et $x, x' \in E$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer $B_f(x, r) = B_f(x', r')$ si, et seulement si, $x = x'$ et $r = r'$.

Indication.

Une implication est évidente, montrer l'implication réciproque par contraposée en commençant par le cas : $x = x'$ et $r \neq r'$.
Ensuite, dans le cas $x \neq x'$, faire un dessin !

Correction.

Il est clair $x = x'$ et $r = r'$ implique $B_f(x, r) = B_f(x', r')$.

Prouvons la réciproque par contraposée. On suppose $(x, r) \neq (x', r')$. Montrons que les boules sont différentes.

1er cas : $x = x'$ et $r' \neq r$. Quitte à échanger r et r' , on peut supposer $r' > r$. Soit u un vecteur unitaire de E (il existe car $E \neq \{0\}$) et $y = x + r'u$. Alors $d(x, y) = \|x - y\| = r'\|u\| = r' > r$ et donc $y \in B_f(x', r')$ et $y \notin B_f(x, r)$. Par suite les deux boules ne sont pas égales. *2eme cas :* $x \neq x'$. Quitte à échanger r et r' , on peut supposer $r' \geq r$. Considérons un élément y sur la droite passant par x et x' tel que x' soit entre x et y et tel qu'il soit assez loin pour ne pas être dans la boule centrée en x . Définissons formellement un tel élément.

Soit u le vecteur unitaire défini par $u = \frac{1}{\|x' - x\|}x' - x$ et on pose $y = x' + r'u$. Comme précédemment, on a $d(x', y) = r'$ et donc $y \in B_f(x', r')$. Or on a :

$$y - x = (x' - x)\left(1 + \frac{r'}{\|x' - x\|}\right),$$

d'où

$$d(x, y) = \left(1 + \frac{r'}{\|x' - x\|}\right)\|x' - x\| = \|x' - x\| + r' > r.$$

Il en résulte que $y \notin B_f(x, r)$.

Dans tous les cas, $B_f(x, r) \neq B_f(x', r')$.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$, on note $\bar{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r . On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

1. On suppose que $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$. Démontrer que $\|a - b\| \leq s - r$.
2. On suppose que $\bar{B}(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \emptyset$. Montrer que $\|a - b\| > r + s$.

Correction.

Pour comprendre ce type d'exercice, il faut impérativement commencer par réaliser un dessin.

1. La contrainte la plus forte exprimée par l'inclusion $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$ est obtenue pour le point de $\bar{B}(a, r)$ le plus éloigné de b possible. On considère ce point qui est donné par $x = a + r(a - b)/\|a - b\|$. x est dans $\bar{B}(a, r)$, donc dans $\bar{B}(b, s)$. Or

$$x - b = \left(1 + \frac{r}{\|b - a\|}\right) (a - b) \implies \|x - b\| = \|b - a\| + r.$$

Puisque $\|x - b\| \leq s$, on en déduit le résultat recherché.

2. Cette fois, on considère y "le" point de $\bar{B}(a, r)$ le plus proche de b . On a donc $y = a + r(b - a)/\|b - a\|$. Puisque $y \notin \bar{B}(b, s)$, on a $\|y - b\| > s$. Mais on a aussi

$$y - b = \left(1 - \frac{r}{\|b - a\|}\right) (a - b) \implies \|y - b\| = \|b - a\| - r.$$

Ceci donne le résultat voulu.

3. Exercices d'approfondissement

a. Normes

Exercice 15. (*) Les normes p sur \mathbb{R}^n , pour $1 < p < +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. En déduire que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

puis montrer que cette dernière inégalité est toujours vraie quand $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$.

Cette inégalité est connue sous le nom de **Inégalité de Hölder**.

3. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'**inégalité de Minkowski**, i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$:

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et l'application de $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Correction.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^p$. Celle-ci est convexe sur \mathbb{R}_+ . En effet, f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $f' : x \mapsto x^{p-1}$ qui est croissante sur \mathbb{R}_+ car $p-1 > 0$.

Remarque : on aurait pu utiliser la dérivée seconde de f et montrer qu'elle est positive, mais ceci seulement sur \mathbb{R}_+^* et non \mathbb{R}_+ dans le cas où $1 < p < 2$ car pour ces valeurs de p , f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors on applique l'inégalité de Jensen à la fonction f et à la famille de points pondérés $\left(x_i, \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$ (on remarque que la somme des pondérations est bien égale à 1) :

$$\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right)^p \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p.$$

Ce qui nous donne le résultat demandé en appliquant la racine p -ième (fonction croissante) de l'inéquation puis en la multipliant par $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

2. On obtient le résultat en appliquant l'inégalité obtenue à la question précédente à $\lambda_i = b_i^p$ et $x_i = a_i (b_i)^{-\frac{q}{p}}$ pour $i = 1, \dots, n$ (il faut également remarquer que $q = \frac{p}{p-1}$).

Maintenant, pour $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_n$; on note $I = \{i \mid b_i \neq 0\}$, et on applique l'inégalité précédente aux familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$. Alors :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i \in I} a_i b_i \leq \left(\sum_{i \in I} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in I} b_i^p \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. On remarque, pour $i = 1, \dots, n$, $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$, d'où

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i (x_i + y_i)^{p-1}.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder aux deux sommes obtenus avec $a_i = x_i$ et $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ pour la première somme et $a_i = y_i$ et $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ pour la deuxième somme. Par suite,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

D'où le résultat.

4. Montrons que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur \mathbb{R}^n . Il est clair que $\|\cdot\|_p$ est positive.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Séparation* : Si $\|x\|_p = 0$, alors $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0$ donc pour $i = 1, \dots, n$, $x_i = 0$. Par suite, $x = (0, \dots, 0)$.
- *Homogénéité* : On a $\|\lambda x\|_p^p = |\lambda|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ donc $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$.
- *Inégalité triangulaire* : On a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{d'après 3)} \\ &\leq \|y\|_p + \|x\|_p \end{aligned}$$

Donc $\|\cdot\|_p$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Exercice 16.

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Correction.

Une première condition nécessaire sur A apparaît en remarquant qu'il faut que $\|P\|_A < +\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. C'est en particulier vrai pour le polynôme $P(X) = X$ et donc il est nécessaire que A soit bornée. Une seconde condition nécessaire apparaît quand on écrit que $\|P\|_A = 0 \implies P = 0$. Supposons en effet que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ soit fini. Alors prenons $P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$. Alors on a $\|P\|_A = 0$ et pourtant $P \neq 0$. Réciproquement, prouvons que si A est une partie infinie bornée, alors $\|\cdot\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. D'une part, cette quantité est bien finie et positive pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. D'autre part, vérifions les trois propriétés de la définition d'une norme :

1. On a toujours, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\sup_{x \in A} |\lambda P(x)| = |\lambda| \times \sup_{x \in A} |P(x)|$ et donc $\|\lambda P\|_A = |\lambda| \times \|P\|_A$.
2. Si $\|P\|_A = 0$, alors P admet une infinité de racines, et donc P est le polynôme nul.

3. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors, pour tout $x \in A$,

$$|P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\|_A + \|Q\|_A.$$

En passant au sup, on obtient que $\|P + Q\|_A \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$. En conclusion, $\|\cdot\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si A est une partie infinie bornée.