Feuille d'exercices n°3

1. Exercices basiques

a. Topologie

Exercice 1.

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup 2$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[$.

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

b. (Sup) Suites et Séries

Exercice 3.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses :

1. Soit (u_n) une suite croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors les propositions "si (u_n) converge vers ℓ, alors $u_n \leq \ell$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$ et "s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ" sont équivalentes.
2. Si (u_n) est une suite géométrique non-nulle de raison $q \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors, (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et que (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n, alors (u_n) est croissante.
5. Toute suite non-majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 4.

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4.** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Exercice 5.

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire la limite de la suite
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$
3. Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}.$$

Exercice 6.

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

$$\mathbf{1}.\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$
$$\mathbf{2}.\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. (u_n) est bornée.
2. (u_n) n'est pas croissante.
3. (u_n) n'est pas monotone.
4. (u_n) n'est pas majorée.
5. (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice 8.

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer, en utilisant la définition, que (u_n) est stationnaire.

Exercice 9.

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $u_n = n\sin(1/n)$
4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
8. $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$
9. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

Exercice 10.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

2. Exercices d'entraînement

a. Topologie

Exercice 11.

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup 2$, $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[$.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

b. (Sup) Suites et Séries

Exercice 13.

On considère la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}$, et on note, pour $n\geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k},\ u_n = S_{2n},\ v_n = S_{2n+1}.$$

1. La série est-elle absolument convergente ?
2. Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Conclure que la série est convergente.

Exercice 14.

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \ln\left(2n^2 - n\right) - \ln(3n+1)$ **2.** $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $a, b \in]0, +\infty[$ **4.** $u_n = \dfrac{\ln(n + e^n)}{n}$

5. $u_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

Exercice 15.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 16.

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

3. Exercices d'approfondissement

a. Topologie

Exercice 17.

Dans cet exercice, la notation (x, y) désigne le segment $[x, y]$ ou le segment $[y, x]$ suivant l'ordre de x et de y. On considère U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit une relation sur les éléments de U par

$$x\mathcal{R}y \iff (x, y) \subset U.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x.
2. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle.
3. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert.
4. En déduire que U est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.