Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°3

1. Exercices basiques

a. Topologie

Exercice 1.

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup 2$, $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n,1/n[$.

Correction.

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés, car toute suite d'entiers naturels (resp. d'entiers relatifs) convergente a sa limite qui est un entier naturel (resp. un entier relatif). $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts. En effet, $0\in\mathbb{N}$ et aucune boule ouverte centrée en 0 n'est contenue dans $\mathbb{N}$ (une boule ouverte est ici un intervalle ouvert du type $]-\varepsilon,\varepsilon[$). $\mathbb{Q}$ n'est ni fermé, ni ouvert. Il n'est pas fermé, car par exemple il existe une suite de rationnels qui converge vers l'irrationnel $\sqrt{2}$. Il n'est pas ouvert, car par exemple tout intervalle ouvert centré en 0 contient des irrationnels. $[0,1[$ n'est pas fermé. La suite (u_n) définie par $u_n=1-\frac{1}{n}$ est contenue dans $[0,1[$, converge vers 1, mais $1\notin[0,1[$. $[0,1[$ n'est pas ouvert, car aucun intervalle ouvert centré en 0 n'est contenu dans $[0,1[$. Pour la même raison, $[0,+\infty[$ n'est pas ouvert. En revanche, $[0,+\infty[$ est fermé : pour toute suite (x_n) de réels positifs qui converge vers ℓ, alors ℓ est un réel positif. $]0,1[\cup\{2\}$ n'est pas fermé (prendre la même suite que ci-dessus), et n'est pas non plus ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 2). $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$ n'est pas ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 1), et n'est pas non plus fermé. En effet, la suite (x_n) définie par $x_n=\frac{1}{n}$ pour $n\geq 1$ est contenue dans cet ensemble, mais sa limite, 0, ne l'est pas. Enfin, on peut remarquer que $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n,1/n[=\{0\}$. En effet, si $x\in\bigcap_{n\geq 1}]-1/n,1/n[$, alors pour tout $n\geq 1$, on a $-\frac{1}{n}\leq x\leq\frac{1}{n}$ et donc par passage à la limite, $x=0$. Ainsi, cet ensemble est fermé, mais pas ouvert (bien que ce soit une intersection d'ouverts !).

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F=E$.

Correction.

Si F est ouvert, alors puisque $0\in F$, il existe $r>0$ tel que $B(0,r)\subset F$. Mais alors, prenons $x\in E$, $x\neq 0$. Alors $y=\frac{rx}{2\|x\|}$ a pour norme $r/2$, c'est donc un élément de F. Puisque F est stable par multiplication par un scalaire, $x=\frac{2\|x\|}{r}y$ est élément de F et donc $F=E$.

b. (Sup) Suites et Séries

Exercice 3.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses :

1. Soit (u_n) une suite croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors les propositions "si (u_n) converge vers ℓ, alors $u_n \leq \ell$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$ et "s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ" sont équivalentes.
2. Si (u_n) est une suite géométrique non-nulle de raison $q \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors, (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et que (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n, alors (u_n) est croissante.
5. Toute suite non-majorée tend vers $+\infty$.

Correction.

1. C'est vrai car la proposition $A \implies B$ est équivalente à non $B \implies$ non A. Ici, notons A="(u_n) converge vers ℓ" et B="$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$". Non B est bien la proposition "$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} > \ell$" et non A est la proposition "(u_n) ne converge pas vers ℓ.
2. C'est vrai. Dire que (y_n) est géométrique de raison a est équivalent à dire que, pour tout entier n, on a $y_{n+1}/y_n = a$. Ici,
$$\frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{u_n}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{q}.$$
3. C'est faux. Prenons par exemple la suite (u_n) définie par $u_{2n} = \frac{1}{n}$ et $u_{2n+1} = \frac{2}{n}$. Alors la suite (u_n) est positive, tend vers 0, et elle n'est pas décroissante car $u_{2n+1} \geq u_{2n}$ pour tout entier n.
4. C'est faux, par exemple si on prend $f(x) = x/2$ et $u_0 = 1$. Alors $u_n = 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ et la suite (u_n) est décroissante. Ce que l'on peut dire, c'est que la suite (u_n) est monotone, et le sens de monotonie est donné par la position de u_1 par rapport à u_0.
5. C'est faux. On peut par exemple penser à la suite (u_n) définie par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$.

Exercice 4.

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4.** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Correction.

1. Utilisant que $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$, on obtient
$$|u_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$
Par le théorème d'encadrement des limites, (u_n) converge vers 0.
2. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :
$$u_n = \frac{2n\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)}{5n\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}\right)} = \frac{2}{5} \times \frac{1+\frac{(-1)^n}{2n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}}.$$
Or, $1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}$ et $1+\frac{(-1)^n}{2n}$ tendent vers 1. On en déduit que (u_n) converge vers $2/5$.
3. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :
$$u_n = \frac{n^3(1+5/n^2)}{4n^2\left(1+\frac{\sin(n)}{4n^2}+\frac{\ln(n)}{4n^2}\right)} = \frac{n}{4} \times \frac{1+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{\sin(n)}{4n^2}+\frac{\ln n}{4n^2}}.$$
Or, $1+\frac{5}{n^2}$ et $1+\frac{\sin(n)}{4n^2}+\frac{\ln n}{4n^2}$ tendent tous les deux vers 1 (pour le deuxième terme, procéder comme à la première question pour $\frac{\sin(n)}{4n^2}$ et utiliser la croissance comparée du logarithme et des polynômes). Ainsi, (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve :
$$u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$
Ainsi, (u_n) tend vers 0.
5. Il suffit d'écrire $3^n e^{-3n} = \left(\frac{3}{e^3}\right)^n$ et puisque $0 < \frac{3}{e^3} < 1$, on en déduit que la suite $(3^n e^{-3n})$ tend vers 0.

Exercice 5.

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire la limite de la suite
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$
3. Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}.$$

Correction.

1. On met tout au même dénominateur, et on procède par identification :

$$\frac{a}{k-1}+\frac{b}{k+1}=\frac{(a+b)k+(a-b)}{k^2-1}.$$

On cherche donc a et b de sorte que

$$\begin{cases} a+b &= 0\\ a-b &= 1\end{cases}$$

On en déduit $a=1/2$ et $b=-1/2$.

2. La somme est télescopique :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

soit

$$u_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

On en déduit que (u_n) converge vers $\frac{3}{4}$.

3. L'idée est de factoriser $k^2+3k+2=(k+1)(k+2)$. On cherche donc a et b tels que

$$\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}.$$

On trouve $a=1$ et $b=-1$. On en déduit que

$$v_n=1-\frac{1}{n+2}$$

et donc (v_n) converge vers 1.

Exercice 6.

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

1. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$

2. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$ et $v_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$.

Correction.

1. Il est clair que (u_n) est croissante puisque $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$ et que $v_n-u_n\to 0$. La

seule difficulté est de prouver que (v_n) est décroissante. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

2. Là encore, il suffit d'appliquer la définition, même si c'est plus difficile techniquement. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{1+(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0. \end{aligned}$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

et enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

qui tend bien vers 0.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. (u_n) est bornée.
2. (u_n) n'est pas croissante.
3. (u_n) n'est pas monotone.
4. (u_n) n'est pas majorée.
5. (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

Correction.

1. $$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$
2. Dire que (u_n) est croissante s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}.$$

La négation est :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}.$$

3. Dire que (u_n) est monotone signifie que (u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante. La négation est (u_n) n'est pas croissante et (u_n) n'est pas décroissante. Ceci s'écrit avec des quantificateurs :

$$\big(\exists n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}\big) \wedge \big(\exists n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}\big).$$

4. $$\forall M > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \geq M.$$

5. $$\exists M > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ u_n \leq M.$$

Exercice 8.

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer, en utilisant la définition, que (u_n) est stationnaire.

Correction.

Soit l la limite de (u_n). Appliquons la définition d'une suite convergente avec $\varepsilon = 1/4$. Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - l| < 1/4.$$

On a alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |l - u_{n_0}| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, u_n et u_{n_0} sont des entiers relatifs dont la distance est inférieure à $1/2$: ils sont nécessairement égaux. On a démontré que pour $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$, c'est-à-dire que la suite est stationnaire.

Exercice 9.

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$	**2**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$	**3**. $u_n = n\sin(1/n)$
4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$	**5**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$	**6**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n!}$	**8**. $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$	**9**. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

Correction.

1. On a
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$
Par comparaison à une série de Riemann convergence, la série est convergente.
2. Le raisonnement est identique :
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.
3. On a $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = 1$ (rappelons que $\sin x \sim_0 x$) et la série est grossièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).
4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on obtient
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n},$$
et la série est donc divergente par comparaison à une série de Riemann divergente.
5. On utilise par exemple la quantité conjuguée :
$$0 \leq u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$
On en déduit que la série converge.
6. On a $(-1)^n + n \sim_{+\infty} n$ et $n^2+1 \sim_{+\infty} n^2$, et donc
$$\frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$
Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est divergente.
7. Il suffit de remarquer que, pour $n \geq 2$, $n! \geq 2^{n-1}$ (ceci se démontre aisément par récurrence par exemple). On en déduit que
$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
Par comparaison à une série géométrique convergente, la série converge.
8. On a, pour $n \geq 2$.
$$u_n = \frac{n\ln(n)}{n!} = \frac{\ln n}{(n-1)!}.$$
Mais on sait aussi que $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$ et donc $\ln(n) = \ln(1+(n-1)) \leq n-1$. Il vient
$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n-2)!}.$$
En exploitant le résultat de la question précédente, on en déduit que la série est convergente.
9. On écrit simplement
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) &= \ln\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right) \\ &\sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$
La série est donc convergente.

Exercice 10.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

Correction.

On a $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0$ ce qui prouve que $0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$. Par majoration d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente, la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ est convergente. D'autre part, on a $0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ (le maximum est toujours égal à l'un ou l'autre, donc inférieur ou égal à la somme des deux puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs). Pour la même raison, la série $\sum_n \max(u_n, v_n)$ converge.

2. Exercices d'entraînement

a. Topologie

Exercice 11.

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup 2$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[$.

Correction.

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés, car toute suite d'entiers naturels (resp. d'entiers relatifs) convergente a sa limite qui est un entier naturel (resp. un entier relatif). $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts. En effet, $0 \in \mathbb{N}$ et aucune boule ouverte centrée en 0 n'est contenue dans $\mathbb{N}$ (une boule ouverte est ici un intervalle ouvert du type $]-\varepsilon, \varepsilon[$). $\mathbb{Q}$ n'est ni fermé, ni ouvert. Il n'est pas fermé, car par exemple il existe une suite de rationnels qui converge vers l'irrationnel $\sqrt{2}$. Il n'est pas ouvert, car par exemple tout intervalle ouvert centré en 0 contient des irrationnels. $[0,1[$ n'est pas fermé. La suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est contenue dans $[0,1[$, converge vers 1, mais $1 \notin [0,1[$. $[0,1[$ n'est pas ouvert, car aucun intervalle ouvert centré en 0 n'est contenu dans $[0,1[$. Pour la même raison, $[0,+\infty[$ n'est pas ouvert. En revanche, $[0,+\infty[$ est fermé : pour toute suite (x_n) de réels positifs qui converge vers ℓ, alors ℓ est un réel positif. $]0,1[\cup\{2\}$ n'est pas fermé (prendre la même suite que ci-dessus), et n'est pas non plus ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 2). $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 1), et n'est pas non plus fermé. En effet, la suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est contenue dans cet ensemble, mais sa limite, 0, ne l'est pas. Enfin, on peut remarquer que $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[= \{0\}$. En effet, si $x \in \bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ et donc par passage à la limite, $x = 0$. Ainsi, cet ensemble est fermé, mais pas ouvert (bien que ce soit une intersection d'ouverts !).

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

Correction.

Si F est ouvert, alors puisque $0 \in F$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset F$. Mais alors, prenons $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $y = \frac{rx}{2\|x\|}$ a pour norme $r/2$, c'est donc un élément de F. Puisque F est stable par multiplication par un scalaire, $x = \frac{2\|x\|}{r} y$ est élément de F et donc $F = E$.

b. (Sup) Suites et Séries

Exercice 13.

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$, et on note, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}, \ u_n = S_{2n}, \ v_n = S_{2n+1}.$$

1. La série est-elle absolument convergente ?
2. Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Conclure que la série est convergente.

Correction.

1. Non, car
$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$
et la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.
2. Étudions la monotonie de (u_n). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leq 0.$$
La suite (u_n) est donc décroissante. De même, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \geq 0.$$
La suite (v_n) est donc croissante. De plus,
$$v_n - u_n = \frac{-1}{2n+1} \to 0.$$
Les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.
3. Puisque deux suites adjacentes convergent vers la même limite, les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite. C'est bien que (S_n) converge, ou encore que la série est convergente.

Exercice 14.

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \ln\left(2n^2 - n\right) - \ln(3n+1)$

2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $a, b \in]0, +\infty[$

4. $u_n = \dfrac{\ln(n+e^n)}{n}$

5. $u_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

Correction.

1. On met en facteur le terme dominant dans chaque logarithme, de sorte que
$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(2n^2\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) - \ln\left(3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right)\\ &= 2\ln n + \ln 2 + \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \ln(n) - \ln(3) - \ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)\\ &= \ln n + \ln 2 - \ln 3 + v_n \end{aligned}$$
où la suite (v_n) tend vers 0. On en déduit que u_n tend vers $+\infty$.
2. On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, de sorte que
$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}.$$
On met encore en facteur, dans chaque racine carrée du dénominateur, le terme dominant (en n^2), et on trouve
$$u_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$
Or, $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ tend vers 1 et $\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ tend également vers 1. On en déduit que (u_n) converge vers 1.
3. Si $a=b$, alors $u_n = 0$ pour tout n, et donc (u_n) converge vers 0. Si $a>b$, alors a^n est prépondérant sur b^n au sens que
$$\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$$
puisque $|b/a| < 1$. On factorise donc par a^n au numérateur et au dénominateur :
$$u_n = \frac{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$
On en déduit que dans ce cas, (u_n) converge vers 1. Si $b>a$, on factorise cette fois par b^n et c'est $(a/b)^n$ qui converge vers 0. On trouve :
$$u_n = \frac{-1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$
(u_n) converge donc vers -1 dans ce cas.

4. On factorise par e^n dans le logarithme. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln\left(e^n(1+ne^{-n})\right)}{n} \\ &= \frac{n+\ln(1+ne^{-n})}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part, ne^{-n} tend vers 0 (par exemple, on peut écrire $ne^{-n} = \frac{1}{\frac{e^n}{n}}$ et utiliser la comparaison des fonctions exponentielle et polynôme au voisinage de l'infini). Puisque la fonction ln est continue en 1 et $\ln(1) = 0$, on en déduit que $\ln(1+ne^{-n})$ tend vers 0. Il vient $\ln(1+ne^{-n})/n$ tend vers 0, et donc la suite (u_n) converge vers 1.

5. On factorise par le terme dominant dans chaque logarithme. On en déduit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(\sqrt{n}) + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln(n^2)+\ln\left(1+n^{-2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2\ln(n)+\ln\left(1+n^{-2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln n}}{2+\frac{\ln(1+n^{-2})}{\ln n}}. \end{aligned}$$

Puisque $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\ln(1+n^{-2})$ tendent vers 0, (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 15.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Correction.

Il suffit de remarquer que, pour tout $k \leq 2n$, on a

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}.$$

Il vient

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Or, la suite (H_n) est croissante. Elle ne peut donc avoir que deux comportements : ou bien elle converge vers une limite l, ou bien elle tend vers $+\infty$. Mais si elle converge vers l, alors, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve

$$0 = l - l \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est bien sûr impossible. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 16.

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Correction.

Puisque les termes généraux des deux séries sont positifs, il suffit de démontrer que les sommes partielles d'une des séries sont majorées si et seulement si les sommes partielles de l'autre le sont. Le point clé est l'encadrement suivant :

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k)u_{2^{k+1}-1} \leq u_{2^k} + \cdots + u_{2^{k+1}-1} \leq (2^{k+1} - 2^k)u_{2^k} \leq 2^k u_{2^k}.$$

Ainsi, supposons que $\sum_k 2^k u_{2^k}$ est convergente, et soit M tel que, pour tout K, on a $\sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} \leq M$. Alors, considérons N un entier et fixons K tel que $N \leq 2^{K+1} - 1$. On a

$$\sum_{n=1}^N u_n \leq \sum_{n=1}^{2^{K+1}-1} u_n \leq \sum_{k=0}^K \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq \sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} \leq M.$$

On en conclut que $\sum_n u_n$ est convergente. Réciproquement, supposons que $\sum_n u_n$ est convergente, et soit M tel que, pour tout N, on a $\sum_{n=1}^N u_n \leq M$. Alors, pour tout entier K, on a

$$\sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} = u_0 + \sum_{k=0}^{K-1} 2^{k+1} u_{2^{k+1}} \leq u_0 + \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}} u_j \leq u_0 + M.$$

Ainsi, la série $\sum_n 2^n u_{2^n}$ est convergente.

3. Exercices d'approfondissement

a. Topologie

Exercice 17.

Dans cet exercice, la notation (x, y) désigne le segment $[x, y]$ ou le segment $[y, x]$ suivant l'ordre de x et de y. On considère U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit une relation sur les éléments de U par

$$x\mathcal{R}y \iff (x, y) \subset U.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x.

2. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle.
3. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert.
4. En déduire que U est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Correction.

Dans cet exercice, on utilisera plusieurs fois que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $(a, c) \subset (a, b) \cup (b, c)$.

1. La réflexion est clairement symétrique et réflexive. De plus, elle est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $(x, y) \subset U$ et $(y, z) \subset U$. Puisque $(x, z) \subset (x, y) \cup (y, z) \subset U$, on a bien $x\mathcal{R}z$ et la relation est transitive.
2. Soient a, b deux éléments de $C(x)$. Il suffit de démontrer que $(a, b) \subset C(x)$. Mais $(a, x) \subset U$ et $(b, x) \subset U$ et donc $(a, b) \subset U$. En particulier, prenons $y \in (a, b)$. Alors $(a, y) \subset U$ et $(a, x) \subset U$ et donc $(a, x) \subset U$, ce qui prouve que $y \in C(x)$ et donc que $C(x)$ est un intervalle.
3. Notons $y = \sup C(x)$. Si $y \in C(x)$, alors l'intervalle $[x, y] \subset U$. Mais puisque U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[y, y + \varepsilon] \subset U$. Mais alors $[x, y + \varepsilon] \subset U$ et donc $y + \varepsilon \in C(x)$, ce qui contredit la définition de y. On démontre de même que $\inf C(x) \notin C(x)$. Puisque $C(x)$ est un intervalle, on a $]\inf C(x), \sup C(x)[= C(x)$, qui est un intervalle ouvert, donc un ouvert.
4. U est réunion disjointe des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$. Ces classes d'équivalence sont des intervalles ouverts d'après la question précédente. Donc U est réunion disjointe d'intervalles ouverts. En utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on pourrait en fait démontrer que U est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.