Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°4

1. Exercices basiques

a. Topologie

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf_{x \in A, y \in B} \|x-y\| > 0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Exercice 3.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\big\} \\
B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\big\} \\
C &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 1\big\} \\
D &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\big\} \setminus \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\big\}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon.

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\bar{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, alors $V = E$.
3. Application : soit H un hyperplan de E. Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E.

Exercice 6.

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $U \cap V$ reste dense.

Exercice 7.

Une suite (u_n) de $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ telle que chacune des suites composantes admet une valeur d'adhérence admet-elle une valeur d'adhérence ?

b. Comparaison de normes

Exercice 8.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\},\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^p |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

2. Exercices d'entraînement

a. Topologie

Exercice 11.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et de P.

Exercice 12.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et que $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Démontrer que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$, mais que l'inclusion peut être stricte.
3. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 13.

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

Exercice 14.

Donner un exemple d'ensemble A tel que A, l'adhérence de A, l'intérieur de A, l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

Exercice 15.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

b. Comparaison de normes

Exercice 16.

Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. La comparer à la norme euclidienne.
3. Expliquer.

Exercice 17.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n = \frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 18.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \ N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.
2. Démontrer que N et N' sont équivalentes.
3. Sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 19.

Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a,b) \in [0,1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

3. Exercices d'approfondissement

a. Topologie

Exercice 20.

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

$$A = \{\text{suites croissantes}\}, \ B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}.$$

Exercice 21.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x, \epsilon) \cap C_E A \neq \emptyset\}$.
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_E A)$.
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. Montrer que si A est fermé, alors $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(A)$.

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel normé Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1. Démontrer que $\bar{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont également bornés.
2. Comparer $\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A})$ et $\mathrm{diam}(\bar{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.
   (b) Soit x un élément de A, et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\mathrm{Fr}(A)$.
   (d) En déduire que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{diam}(A)$.

Exercice 23.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H;\ x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{Z}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

b. Comparaison de normes

Exercice 24.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Exercice 25.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Exercice 26.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$ et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.
2. $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et x, y deux vecteurs de E tels que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors $x \in \mathrm{vect}(y)$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E.
5. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note $B_1 = \{x \in E;\ N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E;\ N_2(x) \leq 1\}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $aB_1 \leq B_2 \leq bB_1$.
6. Soit (u_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit $\ell \in E$. Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $(\|u_n - \ell\|)$ tend vers 0.
7. Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ converge si et seulement si toute suite extraite de (u_n) converge.