Corrigé de la feuille d'exercices n°4

1. Exercices basiques

a. Topologie

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \le 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}.$$

Correction.

A et F sont ouverts. B est fermé, les autres ne sont ni ouverts ni fermés. Voici une preuve variant les techniques :

1. A est ouvert. En effet, si $(x,y) \in A$, alors $0 < |x-1| < 1$, c'est-à-dire que $x \neq 1$ et $0 < x < 2$. On sait alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1 \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et $0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 2$. Alors, $B((x,y),\varepsilon)$ (pour la norme infinie) est contenue dans A. A n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (1/n, 0)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans A.
2. B est fermé. Si (x_n, y_n) est une suite d'éléments de B qui converge vers (x,y), alors on sait que pour chaque entier n, on a $0 \le x_n \le y_n$. En passant à la limite, on en déduit que $0 \le x \le y$ et donc que $(x,y) \in B$. B n'est pas ouvert : dans toute boule contenant $(0,0)$, il y a des points qui ne sont pas dans B (les points du type $(-\varepsilon, 0)$ par exemple).
3. C n'est pas fermé, car si $u_n = (1-\frac{1}{n}, 1)$, (u_n) est une suite d'éléments de C qui converge vers $(1,1)$ qui n'est pas dans C. C n'est pas ouvert, car toute boule contenant le point $(0,1)$, qui est dans C, contient des éléments qui ne sont pas dans C (par exemple les points $(0, 1+\varepsilon)$.
4. D n'est pas fermé : si (r_n) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors la suite $(r_n, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(\sqrt{2}, 0)$ qui n'est pas élément de D. D n'est pas ouvert. Dans toute boule de centre $(0,0)$, qui est élément de D, il existe des éléments qui ne sont pas dans D, par exemple les éléments du type $(0, \sqrt{2}/n)$.
5. E n'est pas ouvert car son complémentaire, D, n'est pas fermé. E n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert.
6. F est ouvert car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]-\infty, 4[$ par la fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2+y^2$. F n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (2-\frac{1}{n}, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(2,0)$ qui n'est pas élément de F.

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf_{x\in A, y\in B}\|x-y\|>0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A\subset U$, $B\subset V$ et $U\cap V=\varnothing$.

Correction.

Posons $\delta=\inf_{x\in A,y\in B}\|x-y\|>0$ et soit $U=\bigcup_{a\in A}B(a,\delta/3)$, $V=\bigcup_{b\in B}B(b,\delta/3)$. Alors U et V sont deux ouverts comme réunion (quelconque) d'ouverts. De plus, il est clair que $A\subset U$ et que $B\subset V$. Enfin, si $x\in U$ et $y\in V$, alors il existe $a\in A$ et $b\in B$ avec $\|x-a\|<\delta/3$ et $\|y-b\|<\delta/3$. De plus, on sait que $\|a-b\|\geq\delta$. Il vient en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|x-y\|\geq\|a-b\|-\|a-x\|-\|b-y\|\geq\delta-\frac{\delta}{3}-\frac{\delta}{3}=\frac{\delta}{3}>0.$$

Ainsi, on a bien $x\neq y$ et $U\cap V=\varnothing$.

Exercice 3.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0\}\\
B &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=1\}\\
C &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy>1\}\\
D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 2\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-1)^2+y^2<1\}.
\end{aligned}$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que A est une partie ouverte (c'est le demi-plan droit strict) : si $(x,y)\in A$, alors $B((x,y),x/2)$ est contenue dans A. Ainsi, $\mathring{A}=A$. D'autre part, on a $\bar{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0\}$. En effet, si (x_n,y_n) est une suite de A qui converge vers (x,y), alors par passage à la limite $x\geq 0$, ce qui prouve que $\bar{A}\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0\}$. Réciproquement, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\geq 0$. Alors, si $x>0$, $(x,y)\in A\subset\bar{A}$ et si $x=0$, alors prenons la suite (x_n,y_n) définie par $x_n=x+\frac{1}{n}$, $y_n=y$. (x_n,y_n) est une suite de A qui converge vers (x,y), ce qui démontre l'inclusion réciproque.
2. On montre facilement que B est fermé, et donc que $\bar{B}=B$. D'autre part, $\mathring{B}=\varnothing$. En effet, si $(x,y)\in B$, il existe une suite (x_n,y_n) qui n'est pas dans B et qui converge vers x, par exemple $x_n=x+\frac{1}{n}$ et $y_n=y$, on a $x_ny_n=1+\frac{y}{n}\neq 1$ puisque $y\neq 0$.
3. On remarque d'abord que cet ensemble est ouvert (le plus facile est de dire qu'il s'agit de l'image réciproque de l'ouvert $]1,+\infty[$ par l'application continue $\phi(x,y)=xy$). Ainsi, $\mathring{C}=C$. D'autre part, par une démonstration semblable à la démonstration effectuée pour A, on démontre que $\bar{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy\geq 1\}$.
4. On va écrire l'ensemble D autrement :

   $$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 2\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-1)^2+y^2\geq 1\}.$$

   Remarquons que D est fermé, et donc $\bar{D}=D$. D'autre part, l'intérieur de l'intersection vaut l'intersection des intérieurs. On a donc :

$$\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2>1\}.$$

La frontière est alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(D) \quad = \quad & \big(\{(x;y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leqslant 2\} \cap \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 | (x-1)^2+y^2=1\}\big) \\ & \cup\big(\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2=2\} \cap \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 | (x-1)^2+y^2 \geq 1\}.\big)\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon.

Correction.

Soit $B = B(x,R)$ une telle boule ouverte, et $y \in \bar{B}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe z dans B avec $\|z-y\| \leq \varepsilon$. On en déduit que :

$$\|z-x\| \leq R+\varepsilon,$$

et donc puisque ceci est vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, $\|z-x\| \leq R$, ce qui montre une inclusion. D'autre part, si y est dans la boule fermée de centre x et de rayon R, il suffit de se restreindre à y sur la sphère, et si ε est un réel positif, on considère :

$$z = x + (R-\varepsilon)\frac{y-x}{R}.$$

Alors, on a $\|z-x\| \leq R-\varepsilon \implies z \in B$ et $\|z-y\| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $y \in \bar{B}$. Bien sûr, on aurait pu faire toute la preuve avec la caractérisation séquentielle, en remplaçant ε par $1/n$ avec $n \to +\infty$.

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\bar{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\mathring{V} \neq \varnothing$, alors $V = E$.
3. Application : soit H un hyperplan de E. Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E.

Correction.

1. Soit $x, y \in \bar{V}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de V. Puisque V est un sous-espace vectoriel, la suite

$$z_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

évolue dans V. On passe à la limite : z_n converge vers $z = \lambda x + \mu y$, qui est élément de $\bar{V}$

puisque $z_n \in V$.

2. Soit $a \in V$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset V$. Soit $x \in B(0,\varepsilon)$. Puisque $x + a \in B(a,\varepsilon) \subset V$ et que V est un espace vectoriel, on a $x \in V$. D'où $B(0,\varepsilon) \subset V$. Si maintenant $x \neq 0$ est dans E, alors $z = \frac{\varepsilon x}{2\|x\|}$ est dans $B(0,\varepsilon)$, donc dans V, et puisque V est un sous-espace vectoriel, c'est aussi le cas de x.
3. Soit H un hyperplan de E. Alors $\bar{H}$ est un sous-espace vectoriel de E et $H \subset \bar{H}$. Par définition d'un hyperplan (sous-espace vectoriel maximal pour l'inclusion), alors ou bien $H = \bar{H}$ et H est fermé, ou bien $\bar{H} = E$ et H est dense.

Exercice 6.

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $U \cap V$ reste dense.

Correction.

Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $B(a,\varepsilon) \cap U \cap V$ est non-vide. Mais U est dense dans E, et donc il existe $u \in U \cap B(a,\varepsilon)$. Puisque $U \cap B(a,\varepsilon)$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(u,\delta) \subset U \cap B(a,\varepsilon)$. Maintenant, puisque V est dense, il existe $v \in V \cap B(u,\delta)$. Alors $v \in B(a,\varepsilon) \cap U \cap V$. Remarquons que l'hypothèse V ouvert est inutile. On aurait pu se contenter de supposer que U est un ouvert dense et que V est dense.

Exercice 7.

Une suite (u_n) de $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ telle que chacune des suites composantes admet une valeur d'adhérence admet-elle une valeur d'adhérence ?

Correction.

Non ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, considérons (u_n) définie par $u_{2n} = (n,0)$ et $u_{2n+1} = (0,n)$. Alors chacune des suites coordonnées admet une suite extraite convergente (et même constante). Si on considère maintenant une suite extraite $(u_{\phi(n)})$, alors $\|u_{\phi(n)}\|_\infty \geq \phi(n) \geq n$ et la suite ne peut pas converger.

b. Comparaison de normes

Exercice 8.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\}, \ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Correction.

Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est bornée (et atteint ses bornes). Ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien défini pour tout $f\in E$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty\geq 0$. D'autre part, si $\|f\|_\infty=0$, alors pour tout x dans $[0,1]$, on a $f(x)=0$, et donc $f=0$. Etudions l'inégalité triangulaire : soient f et g deux éléments de E. Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$|f(x)+g(x)|\leq |f(x)|+|g(x)|\leq \|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

Passant au max, on obtient :

$$\|f+g\|_\infty\leq \|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

Concernant l'homogénéité, prenons $\lambda\in\mathbb R$ et f dans E. Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$|\lambda f(x)|=|\lambda||f(x)|,$$

et passant au max, on a bien l'égalité voulue. Pour la norme $\|.\|_1$: on arrive bien dans $\mathbb R^+$. Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si, et seulement si, il s'agit de la fonction nulle. Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue. On a donc démontré $\|f\|_1=0\implies f=0$. D'autre part, pour tout x de $[0,1]$, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue donne :

$$|f(x)+g(x)|\leq |f(x)|+|g(x)|.$$

Intégrer cette inégalité entre 0 et 1 donne l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_1$. En effet, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^1|\lambda f(x)|dx=|\lambda|\int_0^1|f(x)|dx.$$

Remarquons que, pour chaque x de $[0,1]$, on a :

$$|f(x)|\leq\|f\|_\infty.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1, et on trouve :

$$\|f\|_1\leq\int_0^1\|f\|_\infty dx=\|f\|_\infty.$$

Pour $f_n(x)=x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty=1,\|f_n\|_1=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}.$$

Si les normes étaient équivalentes, il existerait une constante $C>0$ telle que $\|f\|_\infty\leq C\|f\|_1$. Pour $f=f_n$, on obtient :

$$\|f_n\|_\infty\leq C\|f_n\|_1\iff 1\leq\frac{C}{n+1},$$

et un passage à la limite en n donne $1\leq 0$.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Correction.

Considérons, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$. On a alors

$$\|f_n\|_\infty = 1,\ \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ et } \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Si $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ étaient équivalentes, il existerait $A, B > 0$ tels que, pour tout n,

$$A \leq \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} \leq B.$$

Mais $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et un tel encadrement est impossible (on obtiendrait à la limite $A \leq 0$).

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^p |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Correction.

La démonstration qu'il s'agit de normes suit en tout point celle classique concernant les mêmes normes sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $N_1(P) \leq CN_\infty(P)$. Prenons $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$. Alors $N_1(P_n) = n+1 \leq C$, ce qui est impossible pour n grand. Si $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$, pour le même polynôme P_n, on a $N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \leq C$, ce qui est toujours impossible. Enfin, la même suite de polynômes, et le même raisonnement, prouve qu'une inégalité $N_1(P_n) \leq CN_2(P_n)$ est tout aussi impossible. Remarquons que la preuve que ces trois normes ne sont pas équivalentes repose sur le fait que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

2. Exercices d'entraînement

a. Topologie

Exercice 11.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et de P.

Correction.

On va prouver que l'intérieur de D est vide. Pour cela, prenons $f \in D$ et construisons une suite de fonctions f_n dans D^c qui converge vers f pour $\|\cdot\|$. Pour cela, considérons $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$, de sorte que $\|g\|_\infty = \frac{1}{2}$. Mais alors, posons

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} g(x).$$

Alors $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}\|g\|_\infty \leq \frac{1}{2n} \to 0$. Et de plus, f_n n'est pas dérivable en $1/2$ car g ne l'est pas alors que f l'est. Donc $f_n \in D^c$, ce qui achève la preuve que l'intérieur de D est vide. Puisque $P \subset D$, l'intérieur de P est vide lui aussi.

Exercice 12.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et que $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Démontrer que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$, mais que l'inclusion peut être stricte.
3. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Correction.

1. Si $x \in \mathring{A}$, alors A est voisinage de x. Puisque $A \subset B$, B est aussi voisinage de x et $x \in \mathring{B}$. D'autre part, si $x \in \bar{A}$, il existe une suite (x_n) de A qui converge vers x. Mais (x_n) est aussi une suite de B et donc $x \in \bar{B}$.
2. D'une part, on a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc par la question précédente, on a $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A}$ et $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{B}$ d'où $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Réciproquement, si $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset A$ et il existe $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subset B$. Posons $r = \min(r_1, r_2) > 0$. Alors $B(x, r) \subset A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B)^\circ$. De la même façon, de $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on tire $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Prenons maintenant $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$. Alors $\mathring{A} =]0,1[$, $\mathring{B} =]1,2[$ et $(A \cup B)^\circ =]0,2[$. En particulier, $1 \in (A \cup B)^\circ$ alors que $1 \notin \mathring{A} \cup \mathring{B}$.
3. De la même façon qu'à la question précédente, en utilisant le résultat de la première question, on a $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. La première inclusion peut être stricte. En effet, prenons $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$, de sorte que $A \cap B = \varnothing$ alors que $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$. La seconde inclusion est une égalité. Prenons $x \in \overline{A \cup B}$. Alors x est limite d'une suite (x_n) à valeurs dans $A \cup B$. Mais ou bien il y a une infinité de termes de (x_n) qui sont dans A, ou bien il y a une infinité de termes de (x_n) qui sont dans B. Dans le premier cas, $x \in \bar{A}$ et dans le second, $x \in \bar{B}$. Dans tous les cas, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Remarquons que l'on aurait aussi pu déduire les résultats de cette question à partir des résultats de la question précédente en passant au complémentaire, puisque $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ etc...

Exercice 13.

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

Correction.

Soit $x, y \in \bar{C}$, et $t \in [0,1]$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de C. Puisque C est convexe, la suite

$$z_n = tx_n + (1-t)x_n$$

est dans C. On passe à la limite : la suite (z_n) converge vers $tx+(1-t)y$, et cette limite est dans $\bar{C}$. D'où $tx+(1-t)y \in \bar{C}$, ensemble qui est donc convexe. Prouvons maintenant le résultat concernant l'intérieur. Soit $x, y \in \overset{\circ}{C}$, $x \neq y$, et soit $z \in]x, y[$. Alors il existe une (unique) homothétie de centre x qui envoie y sur z (une homothétie de centre x est une application de la forme $w \mapsto x+\lambda(w-x)$. Cette homothétie transforme la boule de centre y et de rayon δ en la boule de centre z et de rayon $\lambda\delta$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(y,\delta) \subset C$ et soit $w \in B(z, \lambda\delta)$. Alors $w = h(u)$, avec u un point de $B(y,\delta)$, et h l'homothétie précédemment considérée. En particulier,w est sur le segment $[x,u]$ et est donc un élément de C. Autrement dit, on vient de prouver que $B(z,\lambda\delta) \subset C$, ce qui prouve $z \in \overset{\circ}{C}$. $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

Exercice 14.

Donner un exemple d'ensemble A tel que A, l'adhérence de A, l'intérieur de A, l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

Correction.

On va considérer une partie de $\mathbb{R}$. Un singleton est d'intérieur vide, et un intervalle ouvert a pour adhérence l'intervalle fermé : on considère donc d'abord :

$$B = \{0\} \cup]1,2[.$$

Si l'on veut ensuite que l'intérieur de l'adhérence de A soit différent de A, il est judicieux que 2 soit dans l'intérieur de l'adhérence de A, et pour cela on colle un intervalle ouvert de l'autre côté de A. On pose alors :

$$A = \{0\} \cup]1,2[\cup]2,3[.$$

On a :

$$\overset{\circ}{A} =]1,2[\cup]2,3[,$$

$$\bar{A} = \{0\} \cup [1,3],$$

$$Int(\bar{A}) =]1,3[,$$

$$Adh(\overset{\circ}{A}) = [1,3],$$

ce qui prouve bien que tous ces ensembles sont différents.

Exercice 15.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Correction.

1. Le forme linéaire $\phi(f) = f(0)$ est continue pour cette norme puisque $|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$. On en déduit que F est fermé puisque $F = \phi^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.
2. Soit $g \in E$. On va construire une suite (f_n) de F telle que $\|f_n - g\|_1 \to 0$. Pour cela, soit $n \geq 1$ et soit f_n la fonction définie par $f(t) = g(t)$ pour $t \in [1/n, 1]$ et $f(t) = tg(1/n)/(1/n)$ si $t \in [0, 1/n]$ (c'est-à-dire que sur $[0, 1/n]$, f est la fonction linéaire qui vaut $g(1/n)$ en $1/n$). Alors $f \in F$ et
$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^{1/n} |f_n(t) - g(t)|dt \leq \int_0^{1/n} |f(t)|dt + \int_0^{1/n} |g(t)|dt.$$
Mais si $t \in [0, 1/n]$, alors $|f(t)| \leq |g(1/n)| \leq \|g\|_\infty$. On en déduit que
$$\|f_n - g\|_1 \leq 2\int_0^{1/n} \|g\|_\infty dt \leq \frac{2\|g\|_\infty}{n}.$$
Ceci prouve que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

b. Comparaison de normes

Exercice 16.

Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x,y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. La comparer à la norme euclidienne.
3. Expliquer.

Correction.

1. D'abord, si $N(x,y) = 0$, alors pour tout t, on a $x + ty = 0$. Choisir $t = 0$ montre que l'on a $x = 0$. Ensuite, si on prend $t = 1$, on obtient également $y = 0$, et donc $(x,y) = 0$. L'homogénéité est claire. Enfin, pour tous (x,y) et tous (x',y'), on a
$$|((x+x') + t(y+y')| \leq |x+ty| + |x'+ty'|,$$
en utilisant simplement l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue. On en déduit :
$$\frac{|(x+x') + t(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{|x'+ty'|}{\sqrt{1+t^2}} \leq N(x,y) + N(x',y').$$

Passant au sup, on obtient :

$$N\big((x,y)+(x',y')\big)\leq N(x,y)+N(x',y').$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$|x+ty|\leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+t^2},$$

ce qui donne

$$\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}\leq N_2(x,y).$$

Pour minorer $N(x,y)$ à l'aide de $N_2(x,y)$, on va donner une valeur particulière au paramètre t. Pour cela, on va (enfin !) étudier la fonction qui à t associe $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, ou plus précisément le carré de cette fonction. On pose donc :

$$f(t)=\frac{(x+ty)^2}{1+t^2}.$$

Le calcul de la dérivée donne, après simplifications :

$$f'(t)=\frac{2(x+ty)(y-tx)}{(1+t^2)^2}.$$

Supposons d'abord $x\neq 0$. f est alors maximale pour $t=y/x$. Et si on évalue en y/x la quantité $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, on trouve précisément... $N_2(x,y)$. Si maintenant $x=0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{|ty|}{\sqrt{1+t^2}}=|y|=N_2(x,y)$$

et donc $N(x,y)\geq N_2(x,y)$. On vient donc de démontrer que $N(x,y)=N_2(x,y)$, ce qui nous aurait bien simplifié la vie pour les questions précédentes... il suffit de donner par exemple la valeur 1 et la valeur -1 au paramètre t.

3. Voila une explication, parmi d'autres, au fait que $N=N_2$. La distance (dans le plan muni d'un repère euclidien) du point M de coordonnées (x,y) à la droite d'équation $X+tY=0$ vaut précisément $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$. Cette distance est toujours inférieure à la distance de M à l'origine, qui vaut $N_2(x,y)$. Voila pourquoi on a $N(x,y)\leq N_2(x,y)$. Cette distance vaut exactement la distance à l'origine lorsque la droite que l'on considère est perpendiculaire à (OM). C'est ainsi que l'on a $N(x,y)\geq N_2(x,y)$.

Exercice 17.

Sur $E=\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P)=\sum_{k=0}^{+\infty}|P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P)=\sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n=\frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

Correction.

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,
$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$
et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P, ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2. On a, pour tout $t \in [-1, 1]$,
$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$
En passant au sup pour $t \in [-1, 1]$, on en déduit que
$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$
Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E.
2. On a
$$N_1(P_n) = (n-1)! \text{ et } N_2(P_n) = \frac{1}{n}.$$
Ainsi, la suite (P_n) converge vers 0 pour N_2, mais n'est pas bornée et donc ne converge pas pour N_1.
3. Les normes ne peuvent pas être équivalentes, sinon une suite convergente pour une norme serait une suite convergente pour l'autre norme.

Exercice 18.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit
$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.
2. Démontrer que N et N' sont équivalentes.
3. Sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Correction.

1. Remarquons d'abord que N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et prenons $f, g \in E$. Alors on a $N(f) = 0$ si et seulement $f(0) = 0$ et $f' \equiv 0$. La deuxième condition entraîne que f est constante sur $[0,1]$ et la première que f est identiquement nulle. De plus, on a clairement $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et
$$N(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g).$$
N est une norme, et la preuve est identique, mais plus simple, pour N'.
2. Il est d'abord clair que $N(f) \leq N'(f)$. De plus, si $x \in [0,1]$, alors on écrit
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

Il vient

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt \leq |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty dt \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N(f).$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq N(f)$, puis que $N'(f) \leq 2N(f)$.

3. La forme des normes nous incite à considérer une suite de fonctions avec norme infinie bornée, mais ayant une grande dérivée, par exemple à considérer pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$. Alors $\|f_n\|_\infty = 1$ tandis que $N(f_n) = n$. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes. A fortiori, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N' ne sont pas équivalentes.

Exercice 19.

Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a, b) \in [0, 1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Correction.

1. La seule difficulté est de vérifier que $N_a(P) = 0 \implies P = 0$. Mais si $N_a(P) = 0$, on a à la fois $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)|dt = 0$. Or, $|P'|$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. Donc $P' = 0$ sur $[0, 1]$. Comme P' est un polynôme, ceci entraîne que $P' = 0$ ou encore que P est un polynôme constant. Puisque $P(a) = 0$, on en déduit que P est identiquement nul.
2. Supposons que N_a et N_b sont équivalentes. Alors, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$C_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq C_2 N_a(P).$$
Pour $n \geq 0$, soit $P(X) = X^n$. On a
$$N_a(P) = a^n + n\int_0^1 t^{n-1}dt = a^n + 1 \text{ et } N_b(P) = b^n + 1.$$
On en déduit alors que, pour tout $n \geq 0$,
$$b^n + 1 \leq C_2(a^n + 1) \iff 1 + \frac{1}{b^n} \leq C_2\left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{C_2}{b^n}.$$
Or, le membre de droite tend vers 1 et le membre de gauche vers 0. On obtient en passant à la limite $1 \leq 0$, ce qui est absurde. L'hypothèse de départ est donc fausse, et N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Supposons par exemple $a \leq b$. Alors
$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)dt \leq \int_0^1 |P'(t)|dt.$$

Ainsi,

$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_a(P).$$

Il vient

$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq 2N_a(P).$$

On a de la même façon

$$|P(a)| \leq |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_b(P)$$

et donc

$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$

Les deux normes sont bien équivalentes.

3. Exercices d'approfondissement

a. Topologie

Exercice 20.

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

$$A = \{\text{suites croissantes}\},\ B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}.$$

Correction.

L'une des difficultés, dans cet exercice, vient des notations. Si on veut utiliser la caractérisation séquentielle des fermés, on va avoir besoin de suites d'éléments de E, c'est-à-dire de suites de suites. Commençons par démontrer que A est fermé. Soit $(u(k))$ une suite d'éléments de A, qui converge vers un élément $u \in E$. Chaque $u(k)$ est une suite croissante. Donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n(k) \leq u_{n+1}(k)$. Si on fait tendre k vers $+\infty$, on en déduit que

$$u_n \leq u_{n+1}$$

et donc que la suite u est croissante. Ainsi, A est bien fermé. Démontrons que B est également fermé. Soit $(u(k))$ une suite d'éléments de B, qui converge vers un élément $u \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier k tel que

$$\|u - u(k)\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - u_n(k)| \leq \varepsilon.$$

Ce k étant fixé, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n(k)| \leq \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - u_n(k)| + |u_n(k)| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, on en tire que u converge vers 0. u est un élément de B, et donc B est fermé.

Exercice 21.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x,\epsilon) \cap C_E A \neq \emptyset\}$.
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_E A)$.
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. Montrer que si A est fermé, alors $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(A)$.

Correction.

1. Soit $x \in \mathrm{Fr}(A)$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $x \in \bar{A}$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. D'autre part, puisque $x \notin \overset{\circ}{A}$, $B(x,\varepsilon)$ n'est pas incluse dans A, ce qui se reformule en $B(x,\varepsilon) \cap C_E A \neq \varnothing$. L'inclusion réciproque se démontre en remontant simplement les étapes.
2. Si l'on remarque que le complémentaire du complémentaire de A est A lui-même, l'écriture précédente de $\mathrm{Fr}(A)$ prouve que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_E A)$.
3. Si A est fermé, alors $\bar{A} \subset A$, et donc $\mathrm{Fr}(A) \subset A$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, soit $x \in \bar{A}$.<ul class="rien">
4. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors $x \in \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
5. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors évidemment $x \in A$. Dans tous les cas, on a prouvé que $x \in A$ et donc $\bar{A} \subset A$: A est fermé.
6. Si A est ouvert, alors $\overset{\circ}{A} = A$, et donc $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$, alors pour chaque $x \in A$, $x \notin \mathrm{Fr}(A)$, et donc $x \in \overset{\circ}{A}$ (puisqu'évidemment $x \in \bar{A}$).
7. On a $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}A) = \overline{\mathrm{Fr}(A)} \cap \overline{C_E \mathrm{Fr}(A)}$. Puisque $\mathrm{Fr}(A)$ est fermé, on a encore $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}A) = \mathrm{Fr}(A) \cap \overline{C_E \mathrm{Fr}(A)}$. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{C_E \mathrm{Fr}(A)}$. Mais, on sait que $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A} = A$ et donc, en passant au complémentaire, $C_E A \subset C_E \mathrm{Fr}(A)$. En passant à l'adhérence, on trouve
$$\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{C_E A} \subset \overline{C_E(\mathrm{Fr}(A))}.$$

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel normé Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1. Démontrer que $\bar{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont également bornés.
2. Comparer $\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A})$ et $\mathrm{diam}(\bar{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.
   (b) Soit x un élément de A, et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\mathrm{Fr}(A)$.
   (d) En déduire que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{diam}(A)$.

Correction.

1. Soit M tel que $A\subset B(0,M)$. Soit $x\in\bar A$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x. Alors, par passage à la limite :
$$\|x_n\|\leq M\implies \|x\|\leq M.$$
Donc $\bar A$ est bornée, et comme $\mathrm{Fr}(A)\subset\bar A$, $\mathrm{Fr}(A)$ est bornée aussi.
2. On a les inclusions :
$$\overset{\circ}{A}\subset A\subset\bar A,$$
qui donnent clairement :
$$\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A})\leq \mathrm{diam}(A)\leq\mathrm{diam}(\bar A).$$
La première inégalité peut être stricte : en effet, si on prend $E=\mathbb R$, et $A=[0,1]\cup\{2\}$, alors $\overset{\circ}{A}=]0,1[$, et on a :
$$\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A})=1,\ \mathrm{diam}(A)=2.$$
En revanche, on a toujours $\mathrm{diam}(A)=\mathrm{diam}(\bar A)$. En effet, pour $\varepsilon>0$, par définition de la borne supérieure, il existe x et y dans $\bar A$ tels que :
$$\|x-y\|\geq \mathrm{diam}(\bar A)-\varepsilon.$$
Mais, par définition de l'adhérence, il existe des éléments x' et y' de A tels que :
$$\|x-x'\|\leq\varepsilon \text{ et } \|y-y'\|\leq\varepsilon.$$
On en déduit :
$$\|x'-y'\|\geq\|x-y\|-\|x'-x\|-\|y'-y\|\geq\mathrm{diam}(\bar A)-3\varepsilon.$$
On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon>0$, on a :
$$\mathrm{diam}(\bar A)\geq\mathrm{diam}(A)\geq\mathrm{diam}(\bar A)-3\varepsilon.$$
Ceci prouve bien que $\mathrm{diam}(A)=\mathrm{diam}(\bar A)$.
3. (a) Il est clair que $\mathrm{Fr}(A)\subset\bar A\implies \mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A))\leq\mathrm{diam}\bar A=\mathrm{diam}A$, d'après le résultat de la question précédente.
   (b) Soit M tel que $A\subset B(0,M)$. On a alors, pour $t\in X$:
   $$\|x+tu\|\leq M\implies\|tu\|-\|x\|\leq M\implies t\|u\|\leq M+\|x\|,$$
   et dont l'ensemble X est une partie de $\mathbb R$ non vide et majorée par $\frac{M+\|x\|}{\|u\|}$. En particulier, sa borne supérieure existe.
   (c) Une telle demi-droite est un ensemble de la forme $\{x+tu;\ t\geq 0\}$. Soit t la borne supérieure de l'ensemble X donné par la question précédente : on va prouver que $x+tu\in\mathrm{Fr}(A)$. En effet, si $\varepsilon>0$:<ul class="rien">
   (d) Il existe t_1 dans X tel que $t-\varepsilon<t_1<t$, et donc la boule de centre $x+tu$ de rayon ε rencontre A en $x+t_1u$.
   (e) $x+(t+\varepsilon/2)u$ n'est pas dans A : c'est donc un point d'intersection du complémentaire de A et de la boule de centre $x+tu$ et de rayon ε.

(f) Soit $\varepsilon > 0$ et x, y dans A tels que

$$\|x - y\| \geq \mathrm{diam}(A) - \varepsilon.$$

On pose $u = y - x$, et X l'ensemble donné par la question (c). On note t_0 la borne sup de X. Il est clair que $t_0 \geq 1$ (puisque $1 \in X$), et d'après la question précédente, $z = x + t_0 u \in \mathrm{Fr}(A)$. Il faut ensuite trouver un deuxième point à la frontière, qu'on trouve en traçant la deuxième demi-droite : pour $v = x - y$, on considère l'ensemble des points $x + tv$. Comme auparavant, on trouve un point à la frontière z'. Il reste à conclure que :

$$z' - z = x + (t_1 v) - (x + t_0)u = (t_1 - t_0)(x - y),$$

ce qui donne :

$$\|z' - z\| \geq \|x - y\| \geq \mathrm{diam}(A) - \varepsilon.$$

Exercice 23.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H;\ x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{Z}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Correction.

1. Il suffit de prouver que $\{x \in H;\ x > 0\}$ est non-vide, puisque c'est une partie de $\mathbb{R}$ minorée. Soit $x \in H$, $x \neq 0$. Si $x > 0$, c'est bon. Sinon, on considère $-x$.
2. Supposons que $m \notin H$. Alors, par définition de la borne inférieure, il existe $x \in H$ tel que $m < x < 2m$. Toujours pas définition de la borne inférieure, il existe $y \in H$ tel que $m < y < x$. Mais alors, $x - y \in H$ puisque H est un groupe et $0 < x - y < m$, ce qui contredit la définition de la borne inférieure. On en déduit que $m \in H$ puis, parce que H est un groupe, que $m\mathbb{Z} \subset H$. Réciproquement, prenons $x \in H$. Si $x \notin m\mathbb{Z}$, soit k l'unique entier relatif tel que $mk < x < (k+1)m$. Alors $0 < x - mk < m$ et $x - mk \in H$, ce qui contredit à nouveau la définition de la borne inférieure. Donc $H = m\mathbb{Z}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $H \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\neq \varnothing$. Comme H est symétrique par rapport à l'origine, on peut toujours supposer que $a \geq 0$. On sait qu'il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Soit $n = \lfloor \frac{a}{x} \rfloor$. Alors on sait que $n \leq \frac{a}{x} < n+1$ soit $nx \leq a < (n+1)x < nx + \varepsilon$. On en tire que $a - \varepsilon < nx \leq a$ et puisque $nx \in H$, que $H \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ est non vide. Ceci prouve bien que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est ou bien dense dans $\mathbb{R}$ ou bien de la forme $m\mathbb{Z}$. S'il est de la forme $m\mathbb{Z}$ alors $a \in m\mathbb{Z}$ et $b \in m\mathbb{Z}$, donc il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = mp$ et $b = mq$. Il vient $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors on sait que

$$\begin{aligned} x \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = ak + bl \\ &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = b\left(\frac{a}{b}k + l\right) \\ &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = b\left(\frac{p}{q}k + l\right) \\ &\iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ x = \frac{b}{a}(pk + lq) \\ &\iff x \in \frac{b}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Or, $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{bn}{a}\mathbb{Z}.$$

b. Comparaison de normes

Exercice 24.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Correction.

1. Posons, pour $f, g \in E$, $\phi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Il est clair que $N(f) = \sqrt{\phi(f,f)}$ et donc il suffit de démontrer que ϕ est un produit scalaire. C'est clairement une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $\phi(f,f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, et d'intégrale nulle, f' est identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi, $f' = 0$ donc f est constante, et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle. ϕ est une forme bilineaire symétrique définie positive, et donc N est une norme.
2. Soit $x \in [0,1]$. Alors on écrit
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$
On en déduit que
$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale, on tire

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left(\int_0^x |f'(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leq |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On applique ensuite (encore!) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que

$$|f(x)| \leq \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2} \times \left(1^2 + 1^2\right)^{1/2}.$$

Prenant le sup pour $x \in [0,1]$, on en déduit bien que

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f).$$

3. Il est facile de vérifier que $\|x^n\|_\infty = 1$ tandis que $N(x^n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. Ainsi, les deux normes ne peuvent pas être équivalentes.

Exercice 25.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Correction.

1. La seule propriété qui pose problème est de prouver que si $N_g(f) = 0$, alors $f = 0$. Si N_g n'est pas une norme, alors il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $f \neq 0$, avec $N_g(f) = 0$. Autrement, $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Puisque f est continue et non-nulle, il existe un intervalle I, non réduit à un point, sur lequel f ne s'annule pas. Mais alors, on en déduit que g doit être nulle sur I. Réciproquement, si g s'annule sur un intervalle I non-réduit à un point, alors on peut construire f continue qui s'annule hors de I et tel qu'il existe $a \in I$ avec $f(a) \neq 0$ (faire un dessin et construire f comme un "pic"). On a donc $f \neq 0$ et $N_g(f) = 0$, donc N_g n'est pas une norme. Par contraposée, on en déduit que N_g est une norme si et seulement si g ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.
2. Remarquons déjà que g, continue sur le segment $[0,1]$, est bornée par une constante $M > 0$. On a donc $N_g(f) \leq M\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$. Supposons de plus que g ne s'annule pas. Alors, puisque $|g|$ est continue et atteint ses bornes sur $[0,1]$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [0,1]$. On a alors clairement $N_g(f) \geq \delta\|f\|_\infty$ et les deux normes sont équivalentes. Réciproquement, si g s'annule, prouvons que les deux normes ne sont pas équivalentes. Soit $M > 0$. On va construire $f \in E$, $f \neq 0$, tel que $\|f\|_\infty \geq MN_g(f)$. Pour cela, on sait, par continuité de g, qu'il existe un intervalle I, non-réduit à un point, et contenu dans $[0,1]$, tel que $|g(x)| \leq \frac{1}{M}$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme à la question précédente, on peut construire f nulle en dehors de I, avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et $f(a) = 1$ pour au moins un a

de I. On a alors

$$\|f\|_\infty = 1 \text{ tandis que } N_g(f) = \sup_{x\in I} |g(x)f(x)| \leq \frac{1}{M}.$$

Ceci prouve bien l'inégalité annoncée, et les deux normes ne sont pas équivalentes. En conclusion, on a démontré que les deux normes sont équivalentes si et seulement si g ne s'annule pas.

Exercice 26.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si (E,N) est un espace vectoriel normé, $x\in E$, $r>0$ et $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon $r>0$, alors pour tout $\lambda>0$, $\lambda B(x,r)=B(x,\lambda r)$.
2. $N:(x,y)\mapsto |5x+3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et x,y deux vecteurs de E tels que $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Alors $x\in\mathrm{vect}(y)$.
4. Soit $E=\mathbb{R}_1[X]$. Alors $N:P\mapsto |P(0)|+|P(1)|$ est une norme sur E.
5. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note $B_1=\{x\in E;\ N_1(x)\leq 1\}$ et $B_2=\{x\in E;\ N_2(x)\leq 1\}$, alors il existe $a,b>0$ tels que $aB_1\leq B_2\leq bB_1$.
6. Soit (u_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ et soit $\ell\in E$. Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $(\|u_n-\ell\|)$ tend vers 0.
7. Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ converge si et seulement si toute suite extraite de (u_n) converge.

Correction.

1. Non ! $\lambda B(x,r)=B(\lambda x,\lambda r)$ et la formule proposée ne fonctionne que si $x=0$.
2. Posons $y=5$ et $x=-3$. Alors $5x+3y=0$, d'où $N(-3,5)=0$ sans que $(-3,5)$ ne soit le vecteur nul. N n'est pas une norme !
3. On va donner un contre exemple avec $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$. Prenons en effet $x=(1,0)$ et $y=(1,1)$. Alors $\|x\|_\infty=\|y\|_\infty=1$ et $\|x+y\|_\infty=2$ alors que (x,y) est libre.
4. Oui. La seule difficulté est de montrer que $N(P)=0 \implies P=0$. Mais si P est un polynôme de degré un (donc une fonction affine) qui s'annule en 0 et en 1, alors P est identiquement nul.
5. C'est vrai ! Si N_1 et N_2 sont équivalentes, il existe $c,d>0$ tels que $cN_1\leq N_2\leq dN_1$. Prenons $x\in B_2$. Alors $N_2(x)\leq 1 \implies N_1(x)\leq\frac{1}{c} \implies x\in\frac{1}{c}B_1$. D'où la première inclusion avec $b=\frac{1}{c}$. L'autre inclusion se montre de façon similaire.
6. C'est vrai, et c'est une conséquence facile de la définition de la convergence d'une suite.
7. Le sens direct est du cours. Pour la réciproque, il suffit de remarquer que (u_n) est une suite extraite d'elle-même.