Mathématiques spéciales

# Feuille d'exercices n°5

## 1. Exercices basiques

**Exercice 1.**

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

**Exercice 2.**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur $E$. Soit $\phi$ l'endomorphisme de $E$ défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier la terminologie : "$\phi$ est un endomorphisme de $E$."
2. Démontrer que $\phi$ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère $f_n$ l'élément de $E$ défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $|||\phi||| = \sup_{f\neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

**Exercice 3.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur $E$. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

**Exercice 4.**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \left\{ f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Démontrer que $A$ est une partie fermée de $E$.

**Exercice 5.**

Soit $E$ un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Démontrer que l'orthogonal de toute partie $A$ de $E$ est un fermé de $E$.

## 2. Exercices d'entraînement

**Exercice 6.**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur $E$ ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto AP$, où $A$ est un élément fixé de $E$, est continue sur $E$ ?

**Exercice 7.**

Soit $E$ l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge. On pose, pour $a = (a_n) \in E$,

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $E$.
2. On pose $F = \{a \in E;\ \sum_{n\geq 1} a_n = 1\}$. $F$ est-il ouvert ? fermé ? borné ?

**Exercice 8.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $u$ est continue si et seulement si $\{x \in E;\ \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

## 3. Exercices d'approfondissement

**Exercice 9.**

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme $N$ dont on munit $E$, $D$ n'est jamais une application linéaire continue de $(E,N)$ dans $(E,N)$.

**Exercice 10.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifer $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que $E$ est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \operatorname{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit $p$ la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.