Corrigé de la feuille d'exercices n°5

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer si l'application linéaire $T:(E,N_1)\to(F,N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$ et $T:(E,\|.\|_1)\to(E,\|.\|_1),\ f\mapsto fg$ où $g\in E$ est fixé.
2. $E=\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0}a_kX^k\|=\sum_{k\geq 0}|a_k|$ et $T:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P\mapsto P'$.
3. $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_kX^k\|=\sum_{k=0}^n|a_k|$ et $T:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P\mapsto P'$.
4. $E=\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0}a_kX^k\|=\sum_{k\geq 0}k!|a_k|$ et $T:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P\mapsto P'$.
5. $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2=\left(\int_0^1|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$, $F=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$ et $T:(E,\|.\|_2)\to(F,\|.\|_1),\ f\mapsto fg$ où $g\in E$ est fixé.

Correction.

1. Puisque g est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée (et atteint ses bornes). Posons $M=\max_{t\in[0,1]}|g(t)|$. Alors on a
$$\|Tf\|_1=\int_0^1|f(t)g(t)|dt\leq M\int_0^1|f(t)|dt\leq M\|f\|_1.$$
Ceci prouve que T est continue.
2. Supposons que T est continue. Alors il existe $C>0$ tel que, pour tout $P\in E$, on a $\|TP\|\leq C\|P\|$. Soit $n\geq 0$. Pour $P=X^n$, on trouve
$$TP=nX^{n-1},\ \text{d'où } n=\|TP\|\leq C\|P\|=C.$$
Ceci est impossible car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Donc T n'est pas continue.
3. On peut utiliser deux arguments différents. On peut d'une part remarquer que E est un espace vectoriel de dimension finie, que toute application linéaire entre espaces de dimension finie est continue. On peut aussi utiliser un calcul direct. En effet, soit $P(X)=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in E$. Alors on a
$$\begin{aligned}\|TP\| &= \left\|\sum_{k=1}^n ka_kX^{k-1}\right\|\\ &= \sum_{k=1}^n k|a_k|\\ &\leq n\sum_{k=1}^n|a_k|\leq n\|P\|.\end{aligned}$$
Puisque n ne dépend pas de P (ceci ne dépend que de E), on obtient que T est continue.

4. On va prouver que T est continue par un calcul direct. Prenons en effet $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ (la somme est en fait finie). Alors on a :

$$\begin{aligned}
\|TP\| &= \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k \right\| \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) k! |a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)! |a_{k+1}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k! |a_k| \\
&\leq \|P\|.
\end{aligned}$$

Ceci prouve la continuité de P.

5. On prouve que T est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Tf\| = \int_0^1 |f(t)||g(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} = C\|f\|_2,$$

avec

$$C = \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

C est bien un réel fini, car g est continue sur $[0,1]$, donc bornée, et on a $C \leq \|g\|_\infty$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier la terminologie : "ϕ est un endomorphisme de E."
2. Démontrer que ϕ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $|||\phi||| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

Correction.

1. ϕ est clairement une application linéaire, et il faut juste rappeler que $\phi(f)$, comme primitive d'une fonction continue, est elle-même continue (donc C^1).

2. On a
$$|\phi(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_1.$$
On en déduit que
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_1 dt \leq \|f\|_1.$$
Ainsi, ϕ est continue.
3. On a $\phi(f_n)(x) = \int_0^x ne^{-nt}dt = 1 - e^{-nx}$. En particulier, $\|f_n\|_1 = \phi(f_n)(1) = 1 - e^{-n}$. De plus,
$$\|\phi(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - e^{-nx})dx = 1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$
4. D'après la question 2, pour tout $f \in E$,
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1,$$
et donc $\|\phi\| \leq 1$. De plus, on a
$$\|\phi(f_n)\|_1 \leq \|\phi\|\|f_n\|_1 \implies 1 - e^{-n} \leq \left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}\right) \|\phi\|.$$
Passant à la limite dans cette inégalité, on conclut que $\|\phi\| \geq 1$, ce qui prouve finalement que $\|\phi\| = 1$.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose
$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$
1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a
$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$
En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Correction.

1. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$. D'abord, si $u = 0$, on a bien $\|u\| = 0$. Réciproquement, si $\|u\| = 0$, alors $\|u(x)\| = 0$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Considérons alors $y \in E$. Si $y = 0$, on a bien $u(y) = 0$. Si $y \neq 0$, considérons $x = y/\|y\|$. Alors $\|x\| = 1$, donc $u(x) = 0$, donc par homogénéité de u, $u(x) = 0$ et u est bien nulle. Considérons maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\{\|\lambda u(x)\|;\ \|x\| = 1\} = |\lambda| \times \{\|u(x)\|;\ \|x\| = 1\}.$$
On en déduit que $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$. Finalement, soient $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a
$$\|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Passant au sup sur x, on obtient bien que $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Ainsi, la formule

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}$$

définit bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.

2. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, la formule est claire sinon posons $y = x/\|x\|$. Alors on a $\|u(y)\| \leq \|u\|$ ce qui implique facilement par homogénéité que $\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$. Soit maintenant $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|u(v(x))\| \leq \|u\| \times \|v(x)\| \leq \|u\| \times \|v\|.$$

Passant au sup en x, on en déduit bien que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice 4.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \left\{ f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Démontrer que A est une partie fermée de E.

Correction.

Posons, pour $f \in E$, $\phi(f) = f(0)$ et $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Alors ϕ et ψ sont deux formes linéaires. De plus, elles sont continues car, pour tout $f \in E$,

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$$

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty.$$

De plus, on a $A = \phi^{-1}(\{0\}) \cap \psi^{-1}([1, +\infty[)$. Comme images réciproques de fermés par une application continue, $\phi^{-1}(\{0\})$ et $\psi^{-1}([1, +\infty[)$ sont fermés. Leur intersection est donc un fermé et A est bien fermé.

Exercice 5.

Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Démontrer que l'orthogonal de toute partie A de E est un fermé de E.

Correction.

On a $A^\perp = \{x \in E;\ \forall a \in A,\ \langle x, a \rangle = 0\}$. Posons $f_a(x) = \langle x, a \rangle$. Alors f_a est une application linéaire continue : en effet, pour tout $x \in E$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \times \|x\|.$$

Mais alors, $A^\perp = \bigcap_{a\in A} f_a^{-1}(\{0\})$. Ainsi, $A^\perp$ est un fermé comme intersection (quelconque) de parties fermées de E.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 6.

Soit $E=\mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_iX^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P(X)\mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P(X)\mapsto AP$, où A est un élément fixé de E, est continue sur E ?

Correction.

1. Supposons ϕ continue. Alors il existe $C\geq 1$ tel que
$$\|\phi(P)\|\leq C\|P\|$$
pour tout polynôme P. Prenons le polynôme $P(X)=X^n$. Alors $\|P\|=1$. Mais $P(X+1)=(X+1)^n=X^n+nX^{n-1}+\dots$. Ainsi, on obtient
$$n\leq \|P(X+1)\|\leq C,$$
ce qui impossible si on choisit n assez grand. Ainsi, ϕ n'est pas continue.
2. Écrivons $A(X)=\sum_{j=0}^p b_jX^j$ et $P(X)=\sum_{i=0}^n a_iX^i$. Alors $AP(X)=\sum_{k=0}^{n+p} c_kX^k$ avec
$$c_k=\sum_{i+j=k} a_ib_j.$$
Notons $M=\max_{j=0,\dots p}|b_j|$. On a donc
$$|c_k|\leq M\sum_{i=\max(0,k-p)}^{k}|a_i|,$$
ce qui entraîne
$$\|AP\|_1\leq M\sum_{k=0}^{n+p}\sum_{i=\max(0,k-p)}^{k}|a_i|.$$
Fixons i_0 dans $\{0,\dots,n\}$. S'il apparait dans la somme $\sum_{i=\max(k-p,0)}^k |a_i|$, c'est que $k-p\leq i_0\leq k$. En particulier, il apparait au plus $k-(k-p)+1=(p+1)$ fois. On en déduit que
$$\|AP\|_1\leq M(p+1)\|P\|_1,$$
ce qui prouve que ψ est continue.

Exercice 7.

Soit E l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 1}|a_n|$ converge. On pose, pour $a=(a_n)\in E$,

$$\|a\|=\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
2. On pose $F=\{a\in E;\ \sum_{n\geq 1}a_n=1\}$. F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Correction.

1. On suit la méthode classique. Si $a=(a_n)$ et $b=(b_n)$ sont éléments de E et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a pour tout N,
$$\sum_{n=1}^N|a_n+b_n|\leq\sum_{n=1}^N(|a_n|+|b_n|)\leq\sum_{n=1}^N|a_n|+\sum_{n=1}^N|b_n|\leq\|a\|+\|b\|.$$
Faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que
$$\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|.$$
Une preuve similaire donne $\|\lambda a\|=|\lambda|\times\|a\|$ tandis que si $\|a\|=0$, alors on a nécessairement $0\leq|a_n|\leq\|a\|=0$ pour tout $n\geq 1$ et donc $a=0$.
2. Posons $\phi(a)=\sum_{n\geq 1}a_n$. Alors ϕ est bien défini sur E (car la convergence absolue entraine la convergence) et ϕ est linéaire. Démontrons que ϕ est continue. Pour cela, on remarque que
$$|\phi(a)|=\left|\sum_{n\geq 1}a_n\right|\leq\sum_{n\geq 1}|a_n|\leq\|a\|.$$
Ceci démontre que ϕ est continue, et comme $F=\phi^{-1}(\{1\})$, F est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc F est fermé. Par ailleurs, F n'est ni ouvert, ni borné. Il n'est pas ouvert, car prenons $a=(1,0,0,\dots)$ qui est un élément de F. Alors, pour tout $\delta>0$, $a+\delta a\notin F$, et donc F n'est pas un voisinage de son élément a. En particulier, F n'est pas ouvert. F n'est pas non plus borné. En effet, prenons la suite $a(p)=(p+1,-p,0,0,\dots)$. Alors, pour chaque p, $a(p)$ est élément de F. Or, $\|a(p)|=2p+1\to+\infty$ si $p\to+\infty$. Donc F n'est pas bornée.

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé et $u\in\mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est continue si et seulement si $\{x\in E;\ \|u(x)\|=1\}$ est fermé.

Correction.

Notons $F=\{x\in E;\ \|u(x)\|=1\}$. D'une part, si u est continue, alors $F=u^{-1}(\{1\})$ est un fermé. Réciproquement, supposons que u ne soit pas continue. Alors il existe une suite (x_n) de

E, $x_n \neq 0$, telle que $\|u(x_n)\|/\|x_n\| \to +\infty$. Posons $y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|}$. Alors $\|y_n\| \to 0$ et $\|u(y_n)\| = 1$. Ainsi, chaque y_n est élément de F. Si F était fermé, alors 0 serait élément de E, ce qui n'est pas le cas. Donc F n'est pas fermé, ce qui démontre que u est continue si et seulement si F est fermé.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E,N) dans (E,N).

Correction.

Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a(x) = e^{ax}$ est dans E, et elle vérifie $Df_a = af_a$. Or, si D était continue pour la norme N, il existerait une constante $C > 0$ telle que

$$N(D(f_a)) \leq CN(f_a)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. On obtiendrait alors que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$|a|N(f_a) \leq CN(f_a) \implies |a| \leq C.$$

C'est bien sûr impossible, et D n'est pas continue sur (E,N).

Exercice 10.

Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifer $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \operatorname{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.

Correction.

1. On a, par télescopage,
$$\sum_{k=0}^{n} u^k(u - Id) = u^{n+1} - Id$$
et donc $v_n = \frac{1}{n+1}(u^{n+1} - Id)$.
2. Soit $y \in \ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u - Id)(x)$. On en déduit que $v_n(y) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x) - x)$. Puisque $\|u^{n+1}(x)\| \leq \|x\|$, on obtient que $(v_n(y))$ tend vers 0. Mais d'autre part, on sait aussi que $u(y) = y$, et donc, pour tout entier n, on a $v_n(y) = y$. Par unicité de la limite, $y = 0$.
3. C'est une conséquence immédiate du théorème du rang et du résultat de la question précédente.
4. Soit $x \in E$, écrivons $x = y + z$ avec $y \in \ker(u - Id)$ et $z \in \operatorname{Im}(u - Id)$. Alors le calcul effectué à la deuxième question montre que $v_n(y) = y$ et que $v_n(z)$ tend vers 0. Ainsi, $(v_n(x))$ tend vers y qui est bien égal à $p(x)$.