Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°6

1. Exercices basiques

a. Compacité

Exercice 1.

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $\bar{B}(0,r)$.

Exercice 2.

Soient K, L deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $d(K,L) = \inf_{x\in K,\ y\in L} \|y-x\| > 0$.

Exercice 3.

Soit F un fermé, et C un compact de $\mathbb{R}^n$. On note $G = F + C = \{x+y;\ x \in F \text{ et } y \in C\}$. Montrer que G est fermé.

Exercice 4.

Soit $\mathcal{C} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1+\dots+x_n = 1,\ x_1 \geq 0,\dots,x_n \geq 0\}$. Soit également $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Démontrer que $\inf_{x\in\mathcal{C}} f(x) > 0$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

b. Connexité par arcs

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E.

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.
3. L'intérieur de A est-il toujours connexe par arcs ?

Exercice 7.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé E telles que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Démontrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 8.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > y\}$ et $F(x,y) = f(x) - f(y)$, pour $(x,y) \in C$.

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

Exercice 9.

On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : A \to B$ telle que f et f^{-1} soient continues.

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0,1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

c. EVN de dimension finie

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a

$$\int_0^1 |P(t)|dt \geq \lambda \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

Exercice 11.

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Exercice 12.

Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13.

Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel normé. On munit $\mathcal{L}_c(E)$ de la norme des applications linéaires. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f i.e. il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$, . Montrer que $|\lambda| \leq \|f\|$.

2. Exercices d'entraînement

a. Compacité

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel normé, B la boule unité fermé de E et S la sphère unité. Démontrer que B est compact si et seulement si S est compact.

Exercice 16.

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et A une partie non vide de E. On définit la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Exercice 17.

Soit E un espace vectoriel normé et (K_n) une suite de parties compactes de E telle que, pour chaque entier n, on $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$.

1. Démontrer que $K \neq \varnothing$.

2. Soit U un ouvert contenant K. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $K_n \subset U$.

Exercice 18.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M > 0,\ \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.
2. Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
3. Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 19.

Une fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y, z) \in A \cap V_x,\ \ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne.

b. Connexité par arcs

Exercice 20.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I;\ x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

c. EVN de dimension finie

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Exercice 23.

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?

Exercice 24.

Soit $n \geq 1$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n. Montrer que $\inf_{P\in E_n} \int_0^1 |P(t)|dt > 0$.

Exercice 25.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E.

1. Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
2. On suppose $F \neq E$. Soit $a \in E\backslash F$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$ On pose $b = (a - x)/\|a - x\|$. Démontrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
3. On suppose que E est de dimension infinie. Construire une suite (b_n) de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|b_n\| = 1 \text{ et } d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1.$$
4. En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie bornée non-vide de E. On souhaite prouver qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A. Pour cela, on note $D = \{r > 0;\ A \text{ est contenu dans une boule de rayon } r\}$.

1. Démontrer que D admet une borne inférieure. Cette borne inférieure sera notée r_0.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $r_n = r_0 + \frac{1}{n}$. Démontrer qu'il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
3. Démontrer que (x_n) est bornée.
4. Conclure.
5. On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Donner un exemple d'ensemble borné A pour lequel il existe plusieurs boules de rayon minimum contenant A.
6. On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Démontrer qu'il existe une unique boule de rayon minimal contenant A. On rappelle l'identité du parallélogramme
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

3. Exercices d'approfondissement

a. Compacité

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et K une partie compacte de E. Pour tout $r > 0$, on pose $K_r = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que K_r est une partie compacte de E.

Exercice 28.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et soit x sa limite. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

Exercice 29.

Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).
2. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E fermé ?

Exercice 30.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E, $f : A \to B$ une application et $G = \{(x, f(x));\ x \in A\}$ son graphe.

1. On suppose que f est continue. Démontrer que son graphe est fermé.
2. On suppose de plus que B est compact et que le graphe de f est fermé. Démontrer que f est continue (on pourra utiliser le théorème suivant : une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.)

b. Connexité par arcs

Exercice 31.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, et $f : A \to F$ une application continue, où F est un espace vectoriel normé. On dit que f est localement constante si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(a, r) \cap A$. Le but de l'exercice est de démontrer que si A est connexe par arcs et f est localement constante, alors f est constante. Pour cela, on fixe $a, b \in A$ et on considère $\phi : [0, 1] \to A$ un chemin continu tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. On pose $t = \sup\{s \in [0, 1];\ f(\phi(s)) = f(a)\}$.

1. Démontre que $t = 1$.
2. Conclure.

Exercice 32.

Soient A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et soit B une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée relativement à A. On pose $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

1. Démontrer que f est continue.
2. En déduire que $B = \varnothing$ ou $B = A$.

c. EVN de dimension finie

Exercice 33.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie bornée de E non vide.

1. Soit $a \in E$. Démontrer qu'il existe une boule $\bar{B}(a, R_a)$ de rayon minimal qui contient A.
2. On pose $R = \inf\{R_a;\ a \in E\}$. Démontrer qu'il existe $b \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(b, R)$.

En particulier, $\bar{B}(b, R)$ est une boule de E de rayon minimal contenant A.

Exercice 34.

Soit (P_n) une suite de polynômes de degré tous inférieurs ou égaux à d. On suppose que (P_n) converge simplement en $d+1$ points distincts de $\mathbb{C}$. Démontrer que (P_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers un polynôme de degré inférieur ou égal à d.

Exercice 35.

Soit $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Montrer que l'ensemble F_p des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 36.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq 1$.

1. Montrer que $\ker(u - Id_E) = \ker(u - Id_E)^2$.
2. En déduire que $\ker(u - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - Id_E) = E$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n}(Id_E + u + \cdots + u^{n-1})$. Montrer que u_n converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers une application v que l'on déterminera.

Exercice 37.

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. On note H l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u(K) \subset K$. Montrer que pour tout $u \in H$, on a $|\det u| \leq 1$.