

Corrigé de la feuille d'exercices n°6

1. Exercices basiques**a. Compacité****Exercice 1.**

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que K soit contenu dans $\bar{B}(0, r)$.

Correction.

Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$. Alors f est continue et comme K est compact, f est bornée et atteint sa borne supérieure. Soit $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \sup\{f(x); x \in K\}$. Alors on a $f(x_0) = \|x_0\| < 1$ puisque K est contenu dans la boule unité ouverte. Posons $r = \|x_0\| < 1$. On a donc, pour tout $x \in K, \|x\| = f(x) \leq f(x_0) = r$. C'est bien que K est contenu dans $\bar{B}(0, r)$.

Exercice 2.

Soient K, L deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé E . Démontrer que $d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \|y - x\| > 0$.

Correction.

Donnons deux rédactions possibles. La première consiste à remarquer que $K \times L$ est compact, comme produit de deux compacts. De plus, l'application $(x, y) \in K \times L \mapsto \|y - x\|$ est continue. Elle atteint donc son minimum. Ainsi, il existe $(x_0, y_0) \in K \times L$ tel que $\|y_0 - x_0\| = \inf\{\|y - x\|; (x, y) \in K \times L\}$. La deuxième rédaction n'utilise pas la compacité de $K \times L$ (mais, en quelque sorte, la redémontre...). Par définition de la borne inférieure, il existe deux suites (x_n) de K et (y_n) de L telles que $\|x_n - y_n\| \rightarrow d(K, L)$. Mais alors la suite (x_n) est une suite du compact K . Elle admet donc une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers $x \in K$. La suite $(y_{\phi(n)})$ est une suite du compact L . Elle admet une suite extraite $(y_{\psi(n)})$ qui converge vers $y \in L$. $(x_{\psi(n)})$ est aussi une suite extraite de $(x_{\phi(n)})$ elle converge donc encore vers x . Finalement, par passage à la limite, on a $\|x - y\| = d(K, L)$. Comme K et L sont disjoints, on en déduit que $d(K, L) = \|x - y\| > 0$.

Exercice 3.

Soit F un fermé, et C un compact de \mathbb{R}^n . On note $G = F + C = \{x + y; x \in F \text{ et } y \in C\}$. Montrer que G est fermé.

Correction.

On va utiliser le critère séquentiel pour les fermés. Soit (z_n) une suite de G qui converge vers z appartenant à \mathbb{R}^n . Il suffit de prouver que $z \in G$. z_n se décompose en $z_n = x_n + y_n$, où $x_n \in F$ et $y_n \in C$. La suite (y_n) qui évolue dans le compact C admet une sous-suite convergente $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers $y \in C$. Maintenant, la suite $x_{\varphi(n)}$, qui s'écrit comme différence de deux suites convergentes, converge vers $x \in \mathbb{R}^n$, et puisque F est fermé, la limite est dans F . Par passage à la limite dans $z_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + y_{\varphi(n)}$, $z = x + y$ est dans $F + C = G$ qui est fermé. Remarquons que ce résultat est faux si on suppose simplement que F et C sont fermés. Par exemple, on peut prendre $F = \mathbb{Z}$ et $C = \sqrt{2}\mathbb{Z}$, dans \mathbb{R} . D'après le résultat classique de structure des sous-groupes de \mathbb{R} , $F + C$ est dense dans \mathbb{R} , sans être \mathbb{R} tout entier : en aucun cas, il ne peut donc être fermé.

Exercice 4.

Soit $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. Soit également $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Démontrer que $\inf_{x \in \mathcal{C}} f(x) > 0$.

Correction.

Supposons pour commencer que l'ensemble \mathcal{C} est compact. Alors on sait que f , qui est continue sur \mathcal{C} , y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $a \in \mathcal{C}$ tel que $f(a) = \inf_{x \in \mathcal{C}} f(x)$. Puisque $f(a) > 0$, le résultat est démontré. Il suffit donc de prouver que \mathcal{C} est compact. Puisque \mathcal{C} est une partie de \mathbb{R}^n , il suffit de prouver qu'elle est bornée et fermée. Pour démontrer qu'elle est bornée, on peut choisir de munir \mathbb{R}^n de la norme $\|\cdot\|_1$ (toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes). Mais, alors, si $x \in \mathcal{C}$, on a

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| = x_1 + \dots + x_n = 1.$$

Ainsi, \mathcal{C} est bornée. Pour démontrer que \mathcal{C} est compact, on va poser

$$\mathcal{C}_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 1\} \text{ et } \mathcal{C}_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0\}, i = 1, \dots, n.$$

Il est clair que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_n$. Pour démontrer que \mathcal{C} est fermé, il suffit de démontrer que chaque \mathcal{C}_i est fermé, puisque l'intersection de parties fermées est fermée. Or, posons $f_0(x) = x_1 + \dots + x_n$ et $f_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, n$. Toutes les fonctions f_i sont continues. De plus,

$$\mathcal{C}_0 = f_0^{-1}(\{1\}) \text{ et } \mathcal{C}_i = f_i^{-1}([0, +\infty[).$$

Ainsi, chaque \mathcal{C}_i est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue, ce qui achève la preuve de la compacité de \mathcal{C} .

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Correction.

Soit M un réel tel que $M > f(0)$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que $\|x\| \geq A \implies \|f(x)\| \geq M$. Ceci entraîne en particulier que :

$$f(0) \leq \inf_{\|x\| \geq A} f(x).$$

Ainsi,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \inf_{\|x\| \leq A} f(x).$$

Maintenant, la boule fermée de centre 0 et de rayon A est compacte dans \mathbb{R}^d , et il suffit d'appliquer le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un compact admet un minimum.

b. Connexité par arcs

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E .

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.
3. L'intérieur de A est-il toujours connexe par arcs ?

Correction.

1. Soit $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$. Puisque A est connexe par arcs, il existe $f : [0, 1] \rightarrow A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = a'$. Puisque B est connexe par arcs, il existe $g : [0, 1] \rightarrow B$ continue telle que $g(0) = b$ et $g(1) = b'$. Mais alors, posons, pour $t \in [0, 1]$, $h(t) = (f(t), g(t))$. Alors h est continue, à valeurs dans $A \times B$ et $h(0) = (a, b)$, $h(1) = (a', b')$. Ainsi, $A \times B$ est bien connexe par arcs.
2. Soit $\phi : A \times B \rightarrow E$, $(a, b) \mapsto a + b$. Alors ϕ est continue, et $\phi(A \times B) = A + B$. Puisque $A \times B$ est connexe par arcs, il en est de même de $A + B$.
3. Trouvons un contre-exemple dans \mathbb{R}^2 . Il suffit de prendre pour A la réunion de deux boules disjointes que l'on relie par un segment. Cet ensemble est connexe par arcs. En revanche, l'intérieur, qui est égal à la réunion des deux boules ouvertes, n'est plus connexe par arcs car on ne peut plus passer de l'une à l'autre.

Exercice 7.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé E telles que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Démontrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Correction.

Soient $a, b \in \bigcup_{i \in I} A_i$. On va construire explicitement un chemin allant de a à b . Soit $c \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et soit i_1, i_2 tel que $a \in A_{i_1}$ et $b \in A_{i_2}$. Alors, puisque A_{i_1} est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ_1 contenu dans A_{i_1} tel que γ_1 relie a à c . Puisque A_{i_2} est connexe par arcs, il

existe un chemin continu γ_2 contenu dans A_{i_2} tel que γ_2 relie c à b . Alors le chemin constitué de γ_1 suivi de γ_2 est un chemin contenu dans $\bigcup_{i \in I} A_i$ qui relie a à b . Ainsi, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 8.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$ et $F(x, y) = f(x) - f(y)$, pour $(x, y) \in C$.

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

Correction.

1. Remarquons d'abord que C est connexe par arcs, car convexe (faire un dessin). Puisque F est continue, $F(C)$ est un connexe par arcs de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle.
2. Puisque f est injective, $0 \notin F(C)$. Puisque $F(C)$ est un intervalle, on a ou bien $F(C) \subset]0, +\infty[$ (et dans ce cas F est strictement croissante), ou bien $F(C) \subset]-\infty, 0[$ (et dans ce cas F est strictement décroissante). Dans tous les cas, on a bien prouvé que F est strictement monotone.

Exercice 9.

On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : A \rightarrow B$ telle que f et f^{-1} soient continues.

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0, 1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

Correction.

1. \mathbb{R}^2 est connexe par arcs. Considérons en effet x et y dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il est facile de voir que l'on peut tracer un arc constitué de deux segments joignant x à y sans passer par l'origine.
2. Procédons par l'absurde et imaginons que \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 soient homéomorphes. Il existerait alors une bijection $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit continue. Posons $a = f(0, 0)$. Alors $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a\}$ resterait une bijection continue. Mais $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, et $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ne l'est pas (les parties de \mathbb{R} connexes par arcs sont les intervalles).
3. On procède de la même façon, en remarquant que le cercle privé d'un point est connexe par arcs, ce qui n'est pas le cas de $[0, 1] \setminus \{1/2\}$. En notant \mathcal{C} le cercle unité et $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ une éventuelle bijection continue, on pose $M = f^{-1}(1/2)$ et on remarque qu'on obtient encore une bijection continue entre le connexe par arcs $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ et le non connexe par arcs $[0, 1] \setminus \{1/2\}$.

c. EVN de dimension finie

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a

$$\int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Correction.

Il suffit de remarquer que E est de dimension finie et que $\int_0^1 |P(t)| dt$ et $\sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ définissent des normes sur E . Elles sont donc équivalentes d'où le résultat.

Exercice 11.

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Correction.

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre cet exercice. On peut par exemple prouver que l'inégalité est vraie pour une norme particulière sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis utiliser l'équivalence des normes. Précisément, considérons $N_\infty(A) = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$. Prenons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $C = AB$. Alors on a, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \times |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n N_\infty(A) N_\infty(B)$$

ce qui prouve que $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$. Mais d'autre part, N et N_∞ sont équivalentes. Il existe donc $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$. On en déduit que

$$N(AB) \leq \frac{1}{\alpha} N_\infty(AB) \leq \frac{1}{\alpha} n N_\infty(A) N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha} N(A) N(B).$$

Exercice 12.

Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

Soit $(S_{i,j}(k))$ une suite de matrices symétriques qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers la matrice $S = (S_{i,j})$. Alors tous les entiers $1 \leq i, j \leq n$ et $k \geq 1$, on a $S_{i,j}(k) = S_{j,i}(k)$. Puisque la convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraîne la convergence coordonnées par coordonnées, ceci implique en faisant tendre

k vers $+\infty$ que $S_{i,j} = S_{j,i}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Ainsi, la matrice S est symétrique et l'ensemble des matrices symétriques est fermé.

Exercice 13.

Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

L'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ (c'est un polynôme en les coefficients de la matrice). En outre,

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*).$$

Ainsi, cet ensemble est ouvert comme image réciproque d'un ouvert. Prouvons qu'il est dense. Une matrice M n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $0 < |\lambda| < \rho$ entraîne que $M - \lambda I$ est inversible. En outre, si $\lambda \rightarrow 0$, $M - \lambda I \rightarrow M$, et donc M est limite d'une suite de matrices inversibles.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel normé. On munit $\mathcal{L}_c(E)$ de la norme des applications linéaires. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f i.e. il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Montrer que $|\lambda| \leq \|f\|$.

Correction.

Soit x un vecteur propre. On a :

$$|\lambda|\|x\| = \|f(\lambda x)\| \leq \|f\|\|x\|,$$

ce qui prouve le résultat puisque $\|x\| \neq 0$.

2. Exercices d'entraînement

a. Compacité

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel normé, B la boule unité fermée de E et S la sphère unité. Démontrer que B est compact si et seulement si S est compact.

Correction.

Un sens est assez facile. En effet, si B est compact, alors S est une partie fermée (pourquoi?) de l'ensemble compact B . C'est donc également un compact. Réciproquement, si S est compact, prouvons que B est compact. Pour cela, considérons (x_n) une suite d'éléments de B . Si (x_n) admet une sous-suite qui converge vers 0, alors il n'y a rien à prouver. Sinon, pour tout n assez grand, $x_n \neq 0$ et on peut donc considérer $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Alors (y_n) est une suite de S et comme S est compact, (y_n) admet une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers $y \in S$. De plus, la suite $(\|x_{\phi(n)}\|)$ est une suite du segment $[0, 1]$ qui est compact. Elle admet donc une suite extraite $(\|x_{\psi(n)}\|)$ qui converge vers le réel $a \in [0, 1]$. Mais alors, $x_{\psi(n)} = \|x_{\psi(n)}\| \times y_{\psi(n)}$ converge vers ay qui est bien un élément de B . Ainsi, B est compact.

Exercice 16.

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et A une partie non vide de E . On définit la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E , notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé. (On remarquera que pour toute partie B de A on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \quad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \|x - x_0\|$ est continue, à valeurs réelles. Elle atteint sa borne inférieure sur tout compact.
2. On fixe un point $z \in A$, et on pose $B = A \cap \overline{B}(x_0, \|x_0 - z\|)$. Puisque $B \subset A$, il est clair que $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$. Maintenant, si $y \in B \setminus A$, on a $\|y - x_0\| \geq \|z - x_0\| \geq d(x_0, B)$. Ceci prouve que $d(x_0, A) = d(x_0, B)$. Maintenant, B est fermé comme intersection de deux fermés, et est compact car il est aussi fermé. Il existe $y \in B \subset A$ tel que :

$$d(x_0, A) = d(x_0, B) = \|y - x_0\|.$$

3. On fixe x_0 et x_1 deux points de E , et y dans A . D'après l'inégalité triangulaire :

$$\|x_0 - y\| - \|x_1 - y\| \leq \|x_0 - x_1\|.$$

On obtient ensuite :

$$d(x_0, A) \leq \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - y\|.$$

On prend enfin la borne inf pour y dans A :

$$d(x_0, A) \leq \|x_0 - x_1\| + d(x_1, A) \implies d(x_0, A) - d(x_1, A) \leq \|x_0 - x_1\|.$$

Par symétrie du rôle joué par x_0 et x_1 , on a finalement :

$$|d(x_0, A) - d(x_1, A)| \leq \|x_0 - x_1\|.$$

L'application $x_0 \mapsto d(x_0, A)$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

4. L'application étant continue sur le compact B , elle y atteint son minimum, disons en $y_0 \notin A$. Puisque A est fermé, $d(y_0, A) > 0$, et donc :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \|a - b\| \geq d(b, A) \geq d(y_0, A) > 0.$$

5. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x + e^{-x}\}$. A et B sont deux fermés disjoints, mais ils ont des points infiniment proches.

Exercice 17.

Soit E un espace vectoriel normé et (K_n) une suite de parties compactes de E telle que, pour chaque entier n , on $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$.

1. Démontrer que $K \neq \emptyset$.
2. Soit U un ouvert contenant K . Démontrer qu'il existe un entier n tel que $K_n \subset U$.

Correction.

1. Pour tout entier n , considérons $x_n \in K_n$. Alors (x_n) est une suite du compact K_0 . Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers x . Mais alors, pour tout entier p et tout $n \geq p$, on a $\phi(n) \geq n \geq p$ et donc $x_{\phi(n)} \in K_p$. Puisque K_p est fermé, $x \in K_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \geq 0$, on en déduit que $x \in K$ et donc que K est non vide.
2. Supposons que ceci soit faux. Alors pour tout entier n , il existe $x_n \in K_n \cap U^c$. Mais alors, comme à la question précédente, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. Mais, puisque U^c est fermé, on a aussi que $x \in U^c$. Ceci contredit que $K \subset U$.

Exercice 18.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M > 0, \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.
2. Pour toute partie bornée B de \mathbb{R} , $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de \mathbb{R}^n .
3. Pour toute partie compacte K de \mathbb{R} , $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de \mathbb{R}^n .

Correction.

- 1. \implies 2. : Soit M tel que $y \in B \implies |y| \leq M$. Soit $R > 0$ associé à ce M par la propriété 1. Si $x \in f^{-1}(B)$ et $\|x\| > R$, par (i), on aurait $|f(x)| > M$, ce qui est impossible puisque $f(x) \in B$.
- 2. \implies 3. : K étant compacte, elle est fermée bornée. Ceci entraîne que $f^{-1}(K)$ est fermé, car l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé, et que $f^{-1}(K)$ est borné, par (ii). Les compacts de \mathbb{R}^n étant exactement les fermés bornés, on a le résultat.
- 3. \implies 1. : Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, il existe M et une suite (x_n) de \mathbb{R}^n telle que $\|x_n\| \geq n$ et $|f(x_n)| \leq M$. Mais alors l'image réciproque de $[-M, M]$ contient la suite (x_n) , elle n'est pas bornée et n'est par conséquent pas compacte.

Exercice 19.

Une fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y, z) \in A \cap V_x, \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de \mathbb{R}^n est en fait lipschitzienne.

Correction.

On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas lipschitzienne sur K . Pour chaque entier n , on peut donc trouver deux éléments y_n et z_n de K tels que

$$\|f(y_n) - f(z_n)\| > n\|y_n - z_n\|.$$

Remarquons que, puisque f est bornée (elle est continue sur le compact K), disons par M , on a

$$\|y_n - z_n\| \leq \frac{2M}{n} \tag{1}$$

et donc $\|y_n - z_n\| \rightarrow 0$. D'autre part, puisqu'elle vit dans le compact K , la suite (y_n) admet une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. D'après l'inégalité (1), il en est de même pour $(z_{\phi(n)})$. Mais on sait que f est localement lipschitzienne en x et donc il existe $C > 0$ et un voisinage V_x de x tels que

$$\forall (y, z) \in K \cap V_x, \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Pour n assez grands, $y_{\phi(n)}$ et $z_{\phi(n)}$ sont éléments de $K \cap V_x$. On en déduit

$$n\|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}\| < \|f(y_{\phi(n)}) - f(z_{\phi(n)})\| \leq C\|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}\|.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, c'est manifestement une contradiction !

b. Connexité par arcs

Exercice 20.

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I; x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de \mathbb{R}^2 .
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Correction.

1. A est convexe, donc connexe par arcs.
2. Soit $z \in g(A)$. Alors il existe $(x, y) \in A$ tel que

$$z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $a \in I$ tel que

$$z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(a)$$

et donc $z \in f'(I)$. D'autre part, soit $z = f'(a) \in f'(I)$. Soit (b_n) une suite de I qui tend vers a par valeurs supérieures. Alors, on a par la définition de la dérivée en a que

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a, b_n).$$

Mais $g(a, b_n) \in g(A)$, et donc $z \in \overline{g(A)}$.

3. $g(A)$ est un connexe par arcs de \mathbb{R} , donc un intervalle. Ainsi, $f'(I)$, qui est compris entre un intervalle et l'adhérence d'un intervalle, est lui-même un intervalle.

c. EVN de dimension finie**Exercice 21.**

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Correction.

Il suffit de démontrer que L est fermé et borné. D'abord, puisque K est compact, il est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, on a $\|x\| \leq M$. Prenons ensuite $y \in L$. Alors il existe $x \in K$ tel que $\|y - x\| \leq r$. Il vient $\|y\| \leq \|x\| + r \leq M + r$ et donc L est bornée. Soit ensuite (y_n) une suite de L qui converge vers $y \in E$, et prouvons que $y \in L$. Pour chaque entier n , il existe $x_n \in K$ tel que $\|y_n - x_n\| \leq r$. Puisque K est compact, il existe $x \in K$ et une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers x . Mais alors $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y et de l'inégalité $\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| \leq r$, on tire en passant à la limite que $\|y - x\| \leq r$. Ceci prouve que $y \in L$, et donc que L est compact.

Exercice 22.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Correction.

Soit F un tel sous-espace, et (e_1, \dots, e_p) une base de F . On complète (e_1, \dots, e_p) en une base (e_1, \dots, e_q) de E . On considère enfin la norme N sur E :

$$N\left(\sum_{i=1}^q x_i e_i\right) = \max_i |x_i|.$$

Rappelons que, puisque E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, il suffit de prouver que F est fermé relativement à cette norme. Soit $(x(n))$ une suite de F , qui converge vers $x \in E$ pour cette norme. Chaque $x(n)$ s'écrit :

$$x(n) = x_1(n)e_1 + \dots + x_p(n)e_p + x_{p+1}(n)e_{p+1} + \dots + x_q(n)e_q,$$

avec $x_i(n) = 0$ si $i \geq p + 1$. On décompose également x sous cette forme :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_q e_q.$$

Remarquons maintenant que :

$$|x_i(n) - x_i| \leq N(x(n) - x).$$

Ceci prouve que chaque suite $(x_i(n))$ converge vers x_i (dans un evn de dimension finie, la convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée). En particulier, pour $i \geq p + 1$, $x_i = 0$ ce qui prouve que $x \in F$.

Exercice 23.

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^t M M = I_n$) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?

Correction.

Il suffit de prouver que cet ensemble est fermé et borné, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2 . Mais cet espace est fermé, car c'est l'image réciproque d'un fermé, à savoir I_n , par l'application continue $M \mapsto {}^t M M$. Il est de plus borné. Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie N_∞ et notons f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors, si M est orthogonale, f est une isométrie et on a

$$|m_{i,j}| = |\langle f(e_j), e_i \rangle| \leq 1.$$

Enfin, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, s'il l'était, puisque l'application déterminant est continue, l'image de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par l'application déterminant serait un connexe par arcs de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle. Or, il est facile de voir que si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M)^2 = 1$ et donc $\det(M) = \pm 1$. De plus, ces deux valeurs sont atteintes, car $\det(I_n) = 1$ et $\det(A) = -1$ où A est la matrice orthogonale diagonale avec -1 pour premier coefficient sur la diagonale, et 0 ailleurs.

On a donc $\det(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$, et donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 24.

Soit $n \geq 1$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n . Montrer que $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt > 0$.

Correction.

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. L'idée est que toutes les normes sont équivalentes sur E , et on va utiliser deux normes différentes, chacune étant bien adaptée à une partie du problème. La première est

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$$

dont on sait que c'est une norme. D'autre part, pour $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, on pose

$$N(P) = \sup_k |a_k|.$$

Il s'agit aussi d'une norme sur E . En utilisant N , on vérifie aisément que E_n est une partie fermée de E . En effet, l'application linéaire $\phi(P) = a_n$, où $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, est continue puisqu'elle vérifie

$$|\phi(P)| \leq N(P).$$

On conclut alors de la façon suivante : si $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt = \inf_{P \in E_n} \|P\|_1 = 0$, on peut trouver une suite (P_k) de E_n telle que $\|P_k\|_1 \rightarrow 0$. Autrement dit, (P_k) converge vers 0. Mais puisque E_n est fermé, on aurait $0 \in E_n$ ce qui n'est pas le cas.

Exercice 25.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E .

1. Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
2. On suppose $F \neq E$. Soit $a \in E \setminus F$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$. On pose $b = (a - x)/\|a - x\|$. Démontrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
3. On suppose que E est de dimension infinie. Construire une suite (b_n) de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|b_n\| = 1 \text{ et } d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1.$$

4. En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Correction.

1. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, il existe une suite (x_n) de F telle que $\|x_n - a\| \rightarrow d(a, F)$. En particulier, la suite (x_n) est bornée et c'est une suite de l'espace vectoriel normé de dimension finie F . Elle admet donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in F$. Mais alors, par passage à la limite, on a $\|x - a\| = d(a, F)$.

2. Il est d'abord évident que $\|b\| = 1$. De plus, $d(b, F) \leq \|b - 0\| \leq 1$. De plus, pour tout $y \in F$, on a

$$\|b - y\| = \frac{1}{\|a - x\|} \times \|a - z\|$$

où $z = x + \|a - x\|y \in F$. Ainsi, $\|b - y\| \geq 1$ et donc $d(b, F) \geq 1$.

3. On construit la suite (b_n) par récurrence. On l'initialise avec b_0 un vecteur unitaire, puis si b_0, \dots, b_{n-1} ont été construits, on définit b_n en utilisant le résultat de la question précédente avec $F = \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})$. Bien sûr, $F \neq E$ puisque E est de dimension infinie.
4. Si la boule unité fermée de E était compacte, la suite (b_n) construite à la question précédente aurait une sous-suite convergente. Mais ce n'est pas le cas. En effet, pour tout $n > m$, on a

$$\|b_n - b_m\| \geq d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1.$$

On ne peut pas extraire d'une telle suite une suite convergente. Autrement, si $(b_{\phi(n)})$ était une telle suite, on aurait $\|b_{\phi(n+1)} - b_{\phi(n)}\| \rightarrow 0$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

Exercice 26.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie bornée non-vide de E . On souhaite prouver qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A . Pour cela, on note $D = \{r > 0; A \text{ est contenu dans une boule de rayon } r\}$.

- Démontrer que D admet une borne inférieure. Cette borne inférieure sera notée r_0 .
- Pour $n \geq 1$, on pose $r_n = r_0 + \frac{1}{n}$. Démontrer qu'il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
- Démontrer que (x_n) est bornée.
- Conclure.
- On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Donner un exemple d'ensemble borné A pour lequel il existe plusieurs boules de rayon minimum contenant A .
- On suppose dans cette question que $E = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Démontrer qu'il existe une unique boule de rayon minimal contenant A . On rappelle l'identité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Correction.

- D est un ensemble non vide (car A est borné) et minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure.
- Par définition de la borne inférieure, il existe $r \in D$ tel que $r_0 \leq r < r_n$. Par définition de D , il existe $x_n \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(x_n, r) \subset \bar{B}(x_n, r_n)$.
- Soit $a \in A$. Alors

$$\|x_n - a\| \leq r_n \leq r_0 + 1.$$

Ainsi, (x_n) est une suite bornée.

- Puisque (x_n) est une suite bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie, elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers $x \in E$. Soit $a \in A$. Passant à la limite dans l'inégalité $\|a - x_{\phi(n)}\| \leq r_{\phi(n)}$, on trouve $\|a - x\| \leq r_0$. Ainsi, $D \subset \bar{B}(x, r_0)$, et cette boule est une boule fermée de rayon minimal contenant A .

5. Considérons $A = [0, 1] \times \{0\}$. Une boule contenant A a au moins un rayon égal à $1/2$ (considérer ce qui se passe sur la première coordonnée). Maintenant, si $x = (1/2, 0)$ et $y = (1/2, 1/4)$, alors $A \subset \bar{B}(x, 1/2)$ et $A \subset \bar{B}(y, 1/2)$. Il n'y a pas unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant A .
6. Supposons que $A \subset \bar{B}(x_1, r_0)$ et $A \subset \bar{B}(x_2, r_0)$. Alors, en utilisant l'identité du parallélogramme, on trouve que, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} \left\| a - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} \|a - x_1\|^2 + \frac{1}{2} \|a - x_2\|^2 - \frac{1}{4} \|x_1 - x_2\|^2 \\ &\leq r_0^2 - \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{4}. \end{aligned}$$

En notant $x = (x_1 + x_2)/2$ et $\rho = \sqrt{r_0^2 - \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{4}} < r_0$, on a donc $A \subset \bar{B}(x, \rho)$, ce qui contredit la minimalité de r_0 .

3. Exercices d'approfondissement

a. Compacité

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et K une partie compacte de E . Pour tout $r > 0$, on pose $K_r = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que K_r est une partie compacte de E .

Correction.

Puisque K_r est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, il suffit de démontrer que K_r est une partie fermée et bornée de E . Que K_r est bornée est facile à démontrer. K étant compact, c'est une partie bornée : soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in K$, on a $\|x\| \leq M$. Alors si $y \in K_r$, l'inégalité triangulaire montre facilement que $\|y\| \leq M + r$. Prouvons désormais que K_r est fermé. Soit (y_n) une suite de K_r qui converge vers $y \in E$. Alors pour chaque n , il existe $x_n \in K$ tel que $y_n \in \bar{B}(x_n, r)$. La suite (x_n) est une suite du compact K . Elle admet donc une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ qui converge vers un certain $x \in K$. Mais alors, de l'inégalité $\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| \leq r$, on tire par passage à la limite que $\|y - x\| \leq r$. Ceci entraîne que $y \in K_r$ et donc que K_r est fermé.

Exercice 28.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite convergente de E et soit x sa limite. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

Correction.

Soit (y_n) une suite de A . Si elle prend un nombre infini de fois la valeur x , alors elle possède une suite extraite constante égale à x , donc convergente dans A . Sinon, y_n prend une infinité de fois une valeur différente de x . Quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer que, pour chaque n , y_n est un terme de la suite de départ, d'où $y_n = x_{\varphi(n)}$. On traite deux cas séparément :

1. La suite d'entiers $(\varphi(n))$ est bornée : autrement dit, (y_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes. Clairement, une telle suite admet une sous-suite convergente (il suffit de prendre une valeur qui est prise une infinité de fois) avec une limite dans A .
2. La suite d'entiers $(\varphi(n))$ n'est pas bornée : on peut alors extraire de (y_n) une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ telle que $\varphi \circ \psi(n)$ soit strictement croissante. Mais alors, $y_{\psi(n)} = x_{\varphi \circ \psi(n)}$ converge vers x puisque c'est une suite extraite de (x_n) .

Dans tous les cas, on a prouvé que (y_n) admettait une suite extraite convergente : l'ensemble A est compact. On peut aussi donner une preuve en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, si on connaît cette caractérisation des parties compactes des espaces vectoriels normés. Pour cela, on considère un recouvrement de A par une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$, et on doit prouver qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Alors, puisque la suite converge vers x , il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on a $x_n \in U_{i_0}$. Soient ensuite i_1, \dots, i_N tels que, pour $j \leq N$, $x_j \in U_{i_j}$. Alors, il est clair que $U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_N}$ est un recouvrement ouvert de A , prouvant que A est compact. Sur cet exemple, la preuve utilisant la propriété de Borel-Lebesgue est sans doute plus facile.

Exercice 29.

Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \rightarrow E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).
2. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E fermé ?

Correction.

1. Soit la fonction continue $\psi(x) = \|f(x) - x\|$, définie sur E , à valeurs dans \mathbb{R} . Cette fonction admet un minimum atteint en α . Supposons que $\alpha \neq f(\alpha)$. Alors :

$$\psi(f(\alpha)) = \|f(\alpha) - f(f(\alpha))\| < \|\alpha - f(\alpha)\| = \psi(\alpha),$$

ce qui contredit la définition de la borne inférieure. Donc $f(\alpha) = \alpha$. L'unicité est immédiate : si α et β sont deux points fixes distincts, on a en effet :

$$\|\beta - \alpha\| = \|f(\beta) - f(\alpha)\| < \|\beta - \alpha\|,$$

ce qui est absurde.

2. On prend $E = \mathbb{R}$, et $f(x) = 1$ si $x \leq 0$, $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$. Cette fonction vérifie les hypothèses demandées, mais n'admet aucun point fixe.

Exercice 30.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E , $f : A \rightarrow B$ une application et $G = \{(x, f(x)); x \in A\}$ son graphe.

1. On suppose que f est continue. Démontrer que son graphe est fermé.
2. On suppose de plus que B est compact et que le graphe de f est fermé. Démontrer que f est continue (on pourra utiliser le théorème suivant : une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.)

Correction.

1. Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite de G qui converge vers $(x, y) \in A \times B$. Alors, puisque f est continue, on sait que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ et donc que $y = f(x)$. Ainsi, $(x, y) \in G$ qui est fermé.
2. Soit $x \in A$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x . Il s'agit de démontrer que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Pour cela, puisque $(f(x_n))$ est une suite du compact B , il suffit de démontrer que $f(x)$ est sa seule valeur d'adhérence. Soit y une valeur d'adhérence de $(f(x_n))$. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers y . Mais $(x_{\varphi(n)})$ converge aussi vers x . Comme la suite $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$ est une suite du fermé G , sa limite est aussi dans G . Autrement dit, $y = f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Connexité par arcs**Exercice 31.**

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E , et $f : A \rightarrow F$ une application continue, où F est un espace vectoriel normé. On dit que f est localement constante si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(a, r) \cap A$. Le but de l'exercice est de démontrer que si A est connexe par arcs et f est localement constante, alors f est constante. Pour cela, on fixe $a, b \in A$ et on considère $\phi : [0, 1] \rightarrow A$ un chemin continu tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. On pose $t = \sup\{s \in [0, 1]; f(\phi(s)) = f(a)\}$.

1. Démontre que $t = 1$.
2. Conclure.

Correction.

1. Posons $H = \{s \in [0, 1]; f(\phi(s)) = f(a)\}$. Cet ensemble est non vide, car $0 \in H$, majoré, il admet donc une borne supérieure t . De plus, $t \in H$, car il existe une suite (s_n) de H qui tend vers t . On a donc $f(a) = f(\phi(s_n))$ et par passage à la limite, $f(t) = f(a)$. Supposons $t < 1$ et posons $c = \phi(t)$. Alors il existe $r > 0$ tel que f est constante sur $B(c, r) \cap A$. Mais alors, par continuité de ϕ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t + \varepsilon < 1$ et $\phi(t + \varepsilon) \in B(c, r)$. Ceci signifie que $t + \varepsilon \in H$, une contradiction avec le fait que t est la borne supérieure de H . Donc $t = 1$.
2. D'après la question précédente, $t = 1$ et $f(b) = f(\phi(1)) = f(a)$. Comme a et b sont arbitraires, c'est bien que f est constante.

Exercice 32.

Soient A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et soit B une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée relativement à A . On pose $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

1. Démontrer que f est continue.
2. En déduire que $B = \emptyset$ ou $B = A$.

Correction.

1. Soit O un ouvert de \mathbb{R} . On va prouver que l'image réciproque de O est un ouvert de A . On distingue quatre cas.
 - Si $0 \notin O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = \emptyset$, qui est bien ouvert (relatif de A).
 - Si $0 \notin O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = B$, qui est bien ouvert (relativement à A).
 - Si $0 \in O$ et $1 \notin O$, alors $f^{-1}(O) = B^c$, qui est bien ouvert relativement à A puisque B est fermé relativement à A .
 - Si $0 \in O$ et $1 \in O$, alors $f^{-1}(O) = A$, qui est bien un ouvert relatif de A .
 Ainsi, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, et donc f est continue.
2. Puisque A est connexe par arcs et que f est continue, $f(A)$ est connexe par arcs. C'est donc un intervalle de \mathbb{R} . Mais $f(A) \subset \{0, 1\}$, et il y a donc deux cas possibles : $f(A) = \{0\}$, ce qui signifie que $B = \emptyset$, et $f(A) = \{1\}$, ce qui signifie que $B = A$.

c. EVN de dimension finie**Exercice 33.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie bornée de E non vide.

1. Soit $a \in E$. Démontrer qu'il existe une boule $\bar{B}(a, R_a)$ de rayon minimal qui contient A .
2. On pose $R = \inf\{R_a; a \in E\}$. Démontrer qu'il existe $b \in E$ tel que $A \subset \bar{B}(b, R)$.

En particulier, $\bar{B}(b, R)$ est une boule de E de rayon minimal contenant A .

Correction.

1. On pose $R_a = \sup\{\|x - a\|; x \in E\}$. Alors on a $A \subset \bar{B}(a, R_a)$ et de plus, par définition de la borne supérieure, R_a est le plus petit réel avec cette propriété.
2. Soit (a_n) une suite de E telle que (R_{a_n}) converge vers R . Alors, (a_n) est une suite bornée. En effet, fixons $x_0 \in A$. Alors, pour tout entier n , on a d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|a_n\| \leq \|a_n - x_0\| + \|x_0\| \leq R_{a_n} + \|x_0\| \leq R + 1 + \|x_0\|$$

dès que n est assez grand. Puisque E est de dimension finie, on peut extraire de (a_n) une suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers un certain $b \in E$. Mais alors, puisque pour tout $x \in A$, on a pour tout entier n ,

$$\|x - a_{\phi(n)}\| \leq R_{a_{\phi(n)}},$$

on a par passage à la limite

$$\|x - b\| \leq R.$$

Exercice 34.

Soit (P_n) une suite de polynômes de degré tous inférieurs ou égaux à d . On suppose que (P_n) converge simplement en $d+1$ points distincts de \mathbb{C} . Démontrer que (P_n) converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers un polynôme de degré inférieur ou égal à d .

Correction.

Posons $E = \mathbb{C}_d[X]$, soit K un compact de \mathbb{C} , et soit a_1, \dots, a_{d+1} les $(d+1)$ points pour lesquels on sait que les suites $(P_n(a_i))$ convergent. On peut toujours supposer que K est infini. On va munir E de deux normes distinctes :

$$N_1(P) = \sup_{z \in K} |P(z)|$$

$$N_2(P) = |P(a_1)| + \dots + |P(a_{d+1})|.$$

Il est classique de vérifier que N_1 et N_2 sont des normes sur E . Le fait que K est infini assure que $N_1(P) = 0 \iff P = 0$. Le fait qu'on considère $d+1$ points et que P est de degré inférieur ou égal à d assure que $N_2(P) = 0 \iff P = 0$. Soit ℓ_i la limite de $(P_n(a_i))$, $i = 1, \dots, d+1$. L'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_{d+1}))$ est un isomorphisme d'espace vectoriel (il suffit, par égalité des dimensions de E et de \mathbb{C}^{d+1} , de vérifier qu'elle est injective). Il existe donc $P \in E$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, d+1$, $P(a_i) = \ell_i$. Puisque $(P_n(a_i))$ converge vers $P(a_i)$ pour chaque $i = 1, \dots, d+1$ et par définition de la norme N_2 , on a $N_2(P - P_n) \rightarrow 0$. Mais E est de dimension finie, et donc N_1 et N_2 sont équivalentes. On en déduit que $N_1(P - P_n)$ tend aussi vers 0, ou encore que (P_n) converge uniformément sur K vers P . Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 35.

Soit $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Montrer que l'ensemble F_p des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

L'important (et le plus difficile) dans cet exercice est de trouver une bonne caractérisation de ces matrices. Nous allons utiliser la suivante : une matrice est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses déterminants d'ordre $p+1$ sont nuls. On peut commencer par écarter le cas $p = n$, puisque dans ce cas $F_p = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose donc $p < n$. Pour I, J deux parties de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal $p+1$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, on désigne par $M_{I,J}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ définie par $(m_{i,j})_{i \in I, j \in J}$. Alors on a

$$F_p = \bigcap_{I, J} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det(M_{I,J}) = 0\}.$$

Or, les deux applications suivantes sont continues :

$$\begin{aligned} g_{I,J} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M_{I,J} \\ \det : \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A). \end{aligned}$$

On a donc

$$F_p = \bigcap_{I,J} (\det \circ g_{I,J})^{-1}(\{0\}).$$

F_p est donc une intersection d'images réciproques de fermés par une application continue. C'est donc un fermé.

Exercice 36.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq 1$.

1. Montrer que $\ker(u - Id_E) = \ker(u - Id_E)^2$.
2. En déduire que $\ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E) = E$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n}(Id_E + u + \dots + u^{n-1})$. Montrer que u_n converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers une application v que l'on déterminera.

Correction.

1. Soit $x \in \ker(u - Id_E)^2$, i.e. $u^2(x) = 2u(x) - x$. On prouve par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$u^n(x) = nu(x) - (n-1)x.$$

La formule est en effet vérifiée pour $n = 1$, et si elle est vraie au rang n , alors

$$u^{n+1}(x) = nu^2(x) - (n-1)u(x) = n(2u(x) - x) - (n-1)u(x) = (n+1)u(x) - nx.$$

Écrivons ceci sous la forme

$$u^n(x) = n(u(x) - x) - x.$$

Puisque la suite $(u^n(x))$ est bornée (par $\|x\|$), ceci n'est possible que si $u(x) = x$. Donc $x \in \ker(u - Id_E)$ ce qui prouve que $\ker(u - Id_E)^2 \subset \ker(u - Id_E)$. Comme l'autre inclusion est toujours vérifiée, on a égalité.

2. D'après le théorème du rang, il suffit de démontrer que $\ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E) = \{0\}$. En effet, si ceci est vérifié, on aura automatiquement par le théorème du rang que la somme directe $\ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$ est de dimension $\dim(E)$, et donc est égale à E . Prenons donc $x \in \ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E)$. On peut alors écrire $x = u(y) - y$, et $u(x) = x$. Il vient $u^2(y) = u(x) + u(y) = x + u(y) = 2u(y) - y$ et donc $y \in \ker(u - Id_E)^2$. D'après la question précédente, y est élément de $\ker(u - Id_E)$ et donc $x = 0$.
3. Prenons $x \in E$ et décomposons le en $x = x_1 + x_2$ dans la somme directe $E = \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$. On a $u(x_1) = x_1$ tandis que, si $x_2 = u(y) - y$, on a

$$u^k(x_2) = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$

Il vient

$$u_n(x) = x_1 + \frac{1}{n}(u^n(y) - y) \rightarrow x_1$$

lorsque n tend vers $+\infty$ puisque, comme auparavant, la suite $(u^n(y))$ est bornée. Donc, pour chaque x , la suite $(u_n(x))$ converge vers $P(x)$ où P est la projection sur $\ker(u - Id_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - Id_E)$. Mais on veut plus. On veut prouver que $\|u_n - P\| \rightarrow 0$.

Introduisons v l'endomorphisme de $\text{Im}(u - Id_E) = F$ induit par u . $v - Id_F$ est inversible (son noyau est restreint à $\{0\}$) et $y = (v - Id_F)^{-1}(x_2)$. Notons aussi Q la projection sur $\text{Im}(u - Id_E)$ parallèlement à $\ker(u - Id_E)$, de sorte que $x_2 = Q(x)$. Le calcul précédent donne alors

$$u_n(x) = P(x) + \frac{1}{n}(u^n(v(Q(x))) - Q(x)).$$

On en déduit :

$$\|u_n(x) - P(x)\| \leq \frac{1}{n} (\|v\| \|Q\| + \|Q\|) \|x\|$$

i.e.

$$\|u_n - P\| \leq \frac{1}{n} (\|v\| \|Q\| + \|Q\|).$$

Ceci prouve bien que $\|u_n - P\|$ tend vers 0.

Exercice 37.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. On note H l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u(K) \subset K$. Montrer que pour tout $u \in H$, on a $|\det u| \leq 1$.

Correction.

On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme usuelle associée à celle de E :

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

$\mathcal{L}(E)$ est ainsi un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrons que H est compact :

- H est borné : en effet, fixons $u \in H$ et soit $x \in E$ avec $\|x\| = 1$. Puisque $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(0, \varepsilon) \in K$. Ceci entraîne $\varepsilon x \in K$. Maintenant, puisque u est continue et que K est compact, il existe $M > 0$ tel que $\|u(y)\| \leq M$ si $y \in K$. On en déduit

$$\|u(x)\| \leq \frac{\|u(\varepsilon x)\|}{\varepsilon} \leq \frac{M}{\varepsilon} \|x\|.$$

Ainsi, on a prouvé que $\|u\| \leq \frac{M}{\varepsilon}$.

- H est fermé : soit (u_n) une suite de H qui converge vers u . En particulier, pour tout x dans K , la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$. Maintenant, puisque K est compact, donc fermé, $u(x) \in K$, et $u \in H$.

H étant fermé et borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie, il est compact. Maintenant, l'application déterminant est continue, et l'image de H par cette application est donc bornée dans \mathbb{R} . Soit $u \in H$. Puisque $u(K) \subset K \implies u^n(K) \subset u^{n-1}(K) \subset \dots \subset K$, u^n est dans H . Mais la suite $\det(u^n) = \det(u)^n$ est bornée. Ceci n'est possible que si $|\det u| \leq 1$.