Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°7

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Les ensembles suivants munis des lois considérées sont-ils des groupes ?

1. G est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition ;
2. G est l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition ;
3. $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, où
$$f_1(x) = x,\ \ f_2(x) = -x,\ \ f_3(x) = \frac{1}{x},\ \ f_4(x) = -\frac{1}{x},$$
muni de la composition.

Exercice 2.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G :

1. $C(G) = \{x \in G;\ \forall y \in G, xy = yx\}$ ($C(G)$ s'appelle le centre de G) ;
2. $aHa^{-1} = \{aha^{-1};\ h \in H\}$ où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G.
3. On suppose de plus que G est abélien. On dit que x est un élément de torsion de G s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$. Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G.

Exercice 3.

Un sous-groupe d'un groupe produit est-il nécessairement produit de deux sous-groupes ?

Exercice 4.

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 5.

Traduire en termes de morphismes de groupes les propriétés bien connues suivantes (dont le domaine de validité a volontairement été omis) :

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;
2. $|zz'| = |z||z'|$;

3. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
4. $e^{x+y} = e^x e^y$;
5. $\det(MM') = \det(M)\det(M')$.

Exercice 6.

Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs ? surjectifs ?

2. Exercices d'entraînement

Exercice 7.

Montrer que les lois suivantes munissent l'ensemble G indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien :

1. $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ sur $G =]-1, 1[$;
2. $(x, y) \star (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x})$ sur $G = \mathbb{R}^2$;

Exercice 8.

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qui sont inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Démontrer que si M est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9.

Montrer que $H = \{x + y\sqrt{3};\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 10.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et A, B deux sous-groupes de G. On note $AB = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 11.

Démontrer que les groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 12.

Un groupe $(G, \cdot)$ est dit divisible si, pour tout $g \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u \in G$ tel que $u^n = g$.

1. Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il divisible ?
2. Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ ne sont pas isomorphes.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 13.

Soit H un sous-groupe strict d'un groupe $(G, \cdot)$. Déterminer le sous-groupe engendré par le complémentaire de H.

Exercice 14.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH = \{ah;\ h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2. Soient $a, b \in G$. Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \varnothing$.
3. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.

Exercice 15.

Soit f un morphisme d'un groupe fini $(G, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Calculer $\sum_{x \in G} f(x)$.

Exercice 16.

Soit G le groupe des isométries du plan affine euclidien qui laissent invariant un triangle équilatéral Δ. Démontrer que G est isomorphe à S_3.