Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°8

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Quel est l'ordre de $\bar{9}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

Exercice 2.

Soit G un groupe et $x \in G$ d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 3.

Soit G un groupe dont tous les élements (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

Exercice 4.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques respectives

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& 3-2t \\ z &=& 5-t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4-3t' \\ y &=& 5-8t' \\ z &=& 7-t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}.$$

1. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles coplanaires ?
2. Vérifier que le point $A(2,3,5)$ est un point de $\mathcal{D}$. Soit M' un point quelconque de $\mathcal{D}'$. Quel est le lieu du point I, milieu de $[AM']$, lorsque M' décrit la droite $\mathcal{D}'$.
3. On considère un point M de $\mathcal{D}$ et un point M' de $\mathcal{D}'$. Quel est le lieu du milieu du segment $[MM']$ lorsque M et M' décrivent respectivement les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 5.

1. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que $m|n$ (m divise n) si, et seulement si $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.
2. a) Décrire les ensembles $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$, $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z}$;
   b) Plus généralement, caractériser le sous-groupe $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$.
   a) Montrer que
   $$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{nu + mv \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$$
   est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$;
   b) Caractériser ce sous-groupe.

Exercice 6.

Soient K, L deux corps et soit $f : K \to L$ un morphisme d'anneaux.

1. Démontrer que si $x \in K \backslash \{0_K\}$, alors $f(x)$ est inversible, et déterminer son inverse.
2. En déduire qu'un morphisme de corps est injectif.

Exercice 7.

Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que A est commutatif, et on fixe x, y deux éléments nilpotents.

1. Montrer que xy est nilpotent.
2. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que $1_A - x$ est inversible.
4. Dans cette question, on ne suppose plus que A est commutatif. Soit $u, v \in A$ tels que uv est nilpotent. Montrer que vu est nilpotent.

Exercice 8.

On dit qu'un anneau A est un anneau de Boole si, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$. On fixe A un tel anneau.

1. Démontrer que, pour tout $x \in A$, $x = -x$.
2. Montrer que A est commutatif.

Exercice 9.

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g : G \to G,\ x \mapsto f(x) + g(x)$. Démontrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 10.

Soit $A = \left\{ \dfrac{m}{n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in 2\mathbb{N} + 1 \right\}$ (c'est-à-dire que A est l'ensemble des rationnels à dénominateur impair). Démontrer que $(A, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 11.

Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $A_d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2;\ y - x \in d\mathbb{Z}\}$.

1. Démontrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
2. Réciproquement, soit A un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$. Démontrer que $H = \{x \in \mathbb{Z};\ (x, 0) \in A\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
3. En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $A = A_d$.

Exercice 12.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M une partie de A. On appelle annulateur de M l'ensemble des $x \in A$ tels que $xy = 0$ pour tout $y \in M$. Démontrer que l'annulateur de M est un idéal de $(A, +, \times)$.

Exercice 13.

On appelle nilradical d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ l'ensemble de ses éléments nilpotents, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe $n \geq 1$ de sorte que $x^n = 0$. Démontrer que le nilradical de A est un idéal de A.

Exercice 14.

Soit A un anneau commutatif.

1. On suppose que A n'admet que les idéaux triviaux $\{0\}$ et A. Démontrer que A est un corps.
2. On suppose que A est intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.

Exercice 15.

On souhaite étudier dans cet exercice les idéaux de $\mathbb{Z}^2$.

1. Soit I un anneau de $\mathbb{Z}^2$ et $I_1 = \{x \in \mathbb{Z};\ (x, 0) \in I\}$, $I_2 = \{y \in \mathbb{Z};\ (0, y) \in I\}$. Démontrer que I_1 et I_2 sont deux idéaux de $\mathbb{Z}$.
2. Démontrer que $I = I_1 \times I_2$.
3. Conclure.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 16.

Soit G un groupe de cardinal $2n$.

1. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par
$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$
est une relation d'équivalence sur G.
2. En déduire que G admet des éléments d'ordre deux.

Exercice 17.

Soient G et H deux groupes.

1. Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H, alors (g, h)

est d'ordre $\mathrm{ppcm}(p,q)$ dans $G\times H$.

2. On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G\times H$ est cyclique si et seulement si les ordres de G et H sont premiers entre eux.

Exercice 18.

Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux,

$$\mathbb{D}=\left\{\frac{n}{10^k};\ n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Démontrer que $(\mathbb{D},+,\times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 19.

On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2};\ a,b\in\mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$ est un anneau.
2. On note $N(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$. Montrer que, pour tous x,y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy)=N(x)N(y)$.
3. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont ceux s'écrivant $a+b\sqrt{2}$ avec $a^2-2b^2=\pm1$.

Exercice 20.

Soit A un anneau. On appelle caractéristique de A l'ordre de 1_A dans le groupe additif $(A,+)$. Dans la suite, on supposera que A est de caractéristique finie n.

1. Démontrer que, pour tout $x\in A$, $nx=0$.
2. Démontrer que si A est intègre, n est un nombre premier.
3. Démontrer que si A est intègre et commutatif, alors $x\mapsto x^n$ est un morphisme d'anneaux.

Exercice 21.

Soit p un nombre premier. On note

$$\mathbb{Z}_p=\left\{x=\frac{m}{n};\ (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ p\wedge n=1\right\}.$$

1. Vérifier que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.
2. Soit $k\geq 0$. On note

$$J_{p^k}=\left\{\frac{m}{n};\ (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ p\wedge n=1,\ p^k|m\right\}.$$

   Vérifier que J_{p^k} est un idéal de $\mathbb{Z}_p$.
3. Réciproquement, montrer que si I est un idéal de A, il existe $k\geq 1$ tel que $I=J_{p^k}$.

Exercice 22.

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib;\ a, b \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - \omega| < 1$.
4. Soient $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $v \neq 0$. Démontrer qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ avec $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
5. Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est principal.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 23.

Soit G un groupe abélien, x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q.

1. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Démontrer que xy est d'ordre pq.
2. Importance des hypothèses - 1 : Si $H = GL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, vérifier que A et B sont d'ordre fini, mais que AB n'est pas d'ordre fini.
3. Importance des hypothèses - 2 : Si p et q ne sont pas supposés premiers entre eux, démontrer que le produit xy n'est pas nécessairement d'ordre pq, ou d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$.
4. Une application :
   (a) Soit d un diviseur de p. Démontrer qu'il existe un élément d'ordre d dans G.
   (b) En déduire que G admet des éléments d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$.
   (c) On suppose de plus que G est fini. Démontrer que G admet un élément dont l'ordre est le ppcm de l'ordre des éléments de G.

Exercice 24.

Soit G un groupe cyclique et soit H un sous-groupe de G. Démontrer que H est cyclique.

Exercice 25.

1. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G d'ordre des entiers premiers. Démontrer que $H = K$ ou que $H \cap K = \{e\}$.
2. Démontrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

Exercice 26.

Soit A un anneau intègre commutatif fini. Démontrer que A est un corps.

Exercice 27.

Soit E un ensemble fini et $A = \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $(A, \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?
2. Soit $E' \subset E$. Démontrer que $I = \mathcal{P}(E')$ est un idéal de A.
3. Réciproquement, soit I un idéal de A. Prouver que
$$\left\{\begin{array}{l}\forall X \in I,\ \forall Y \subset X,\ Y \in I \\ \forall X \in I,\ \forall Y \in I,\ X \cup Y \in I.\end{array}\right.$$
4. En déduire qu'il existe $E' \subset E$ tel que $I = \mathcal{P}(E')$.
5. Si E est infini, démontrer que l'ensemble des parties finies de E forme un idéal de A qui n'est pas de la forme $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 28.

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I est premier si $xy \in I \implies x \in I$ ou $y \in I$. On dit que I est maximal si, pour tout idéal J de A tel que $I \subset J$, on a $J = I$ ou $J = A$.

1. Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
2. Soit I un idéal et $x \in A \backslash I$. Soit J l'idéal engendré par I et x. Montrer que
$$J = \{a \in A;\ \exists i \in I,\ \exists k \in A,\ a = i + kx\}.$$
3. En déduire que tout idéal maximal est premier.
4. Montrer que si tous les idéaux de A sont premiers, alors A est un corps.
5. Montrer que si A est principal, tout idéal premier est maximal.
6. (pour ceux qui savent quotienter par un idéal) Soit I un idéal de A. Montrer que I est premier si et seulement si A/I est intègre. Montrer que I est maximal si et seulement si A/I est un corps. En déduire une autre preuve que I maximal entraine I premier.

Exercice 29.

Soit A un anneau principal.

1. On suppose que toute suite décroissante (pour l'inclusion) d'idéaux de A est stationnaire. Montrer que A est un corps.
2. Démontrer que toute suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de A est stationnaire.