Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°10

1. Exercices basiques

Exercice 1.

1. Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?
2. La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $A\mathcal{R}B$ si et seulement A divise B est-elle une relation d'ordre ?

Exercice 2.

Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ **2.** $P'^2 = 4P$
3. $P \circ P = P$.

Exercice 4.

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 5.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$ et soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$. Exprimer R en fonction de $P(a)$ et de $P'(a)$.

Exercice 6.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 7.

Le but de cet exercice est de déterminer

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(X^2) = (X^3+1)P(X)\}.$$

1. Démontrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme $X^3 - 1$ sont solutions du problème.
2. Analyse du problème. Soit $P \in E$ non nul.
   (a) Montrer que P est de degré 3.
   (b) Démontrer que $P(1) = 0$, puis que $P'(0) = P''(0) = 0$ (on pourra penser à dériver la relation $P(X^2) = (X^3+1)P(X)$).
   (c) En effectuant la division euclidienne de P par $X^3 - 1$, démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \lambda X^3 - 1$.
3. Synthèse du problème : en déduire l'ensemble E.

Exercice 8.

Déterminer les pgcd suivants :

1. $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$;
2. $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$;
3. $P(X) = X^n - 1$ et $Q(X) = (X-1)^n$, $n \geq 1$.

Exercice 9.

Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.

Exercice 10.

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + 1$ **2.** $X^8 - 1$ **3.** $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

Exercice 11.

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$.

1. Déterminer une racine rationnelle de P.
2. En déduire la factorisation de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 12.

Soit P le polynôme $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13.

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 14.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ AM = MA\}$. Montrer que C est une algèbre.

Exercice 15.

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et $E = \{M(a,b,c);\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que E une algèbre, et en donner une base en tant qu'espace vectoriel.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 16.

Quel est le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par

1. $X^2 - 3X + 2$ **2**. $X^2 + X + 1$ **3**. $X^2 - 2X + 1$?

Exercice 17.

Démontrer que

1. $X^{n+1}\cos\big((n-1)\theta\big) - X^n\cos(n\theta) - X\cos\theta + 1$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$;
2. $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 18.

Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non-constant. On suppose que $A \circ P | B \circ P$. Démontrer que $A|B$.

Exercice 19.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $(X-1)^2$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^2$ divise $P(X)-1$.

Exercice 20.

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les racines de polynômes de degré 3 ou 4 connaissant des informations sur ces racines.

1. Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.
2. Soit $Q(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q. On sait que $x_1 + x_2 = 2$.
   (a) Déterminer la valeur de $x_1 x_2$, $x_3 x_4$ et $x_3 + x_4$.
   (b) En déduire les valeurs des racines.

Exercice 21.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

1. Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2. En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.
3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que toutes les racines de P sont réelles.

Exercice 22.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P, d'images respectives dans le plan complexe $A_1, \ldots, A_n$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ les racines de P', d'images respectives dans le plan complexe $B_1, \ldots, B_{n-1}$.

1. Montrer que les familles de points $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ ont même isobarycentre.
2. Quelle est l'image dans la plan complexe de la racine de $P^{(n-1)}$?

Exercice 23.

Soit P le polynôme $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 24.

On considère les deux polynômes suivants :

$$P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24 \text{ et } Q(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15.$$

Décomposer ces deux polynômes en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'ils ont une racine commune.

Exercice 25.

1. Rappeler la décomposition en produits d'irréductibles de $X^n - 1$.
2. En déduire la décomposition en produits d'irréductibles de $1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
3. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 26.

Déterminer les couples (A, B) de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ tels que le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B et dans la division euclidienne de B par A soient identiques.

Exercice 27.

Soient n, p deux entiers naturels non nuls et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Pour chaque $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de k par p. Démontrer que le reste de la division euclidienne de P par $X^p - 1$ est le polynôme $R(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{r_k}$.

Exercice 28.

Soient $n, m \geq 1$. Déterminer le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Exercice 29.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.
   (a) Démontrer que si z est racine de P, il existe une racine de P de module supérieur strict à z.
   (b) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \backslash \{0\}$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
   (a) Démontrer que si z est racine de P, alors $z = j$ ou $z = j^2$.
   (b) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solution.

Exercice 30.

Soit, pour $n \geq 0$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Démontrer que P_n admet n racines simples complexes.
2. Démontrer que, si n est impair, une et une seule de ces racines est réelle, et que si n est pair, aucune des racines n'est réelle.

Exercice 31.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Démontrer que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ si et seulement si $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 32.

On note

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}[X];\ \exists P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X];\ P = P_1^2 + P_2^2\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit. On pourra considérer l'application $\phi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P\bar{P}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 33.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n est réciproque s'il s'écrit $P = a_n X^n + \dots + a_0$ avec $a_k = a_{n-k}$ pour tout k dans $\{0, \dots, n\}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Démontrer que P est réciproque si et seulement si $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.
2. Montrer qu'un produit de polynômes réciproques est réciproque.
3. On suppose que P et Q sont réciproques et que $Q|P$. Démontrer que $\frac{P}{Q}$ est réciproque.
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme réciproque.
   a. Démontrer que si α est une racine de P, alors $\alpha \neq 0$ et α^{-1} est une racine de P.
   d. Démontrer que si 1 est une racine de P, alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.
   c. Démontrer que si le degré de P est impair, alors -1 est racine de P.
   d. Démontrer que si P est de degré pair et si -1 est une racine de P, alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.
5. Démontrer que tout polynôme réciproque de $\mathbb{C}[X]$ de degré $2n$ se factorise en

   $$P = a_{2n}(X^2 + b_1 X + 1) \dots (X^2 + b_n X + 1).$$

   Que peut-on dire si le degré de P est impair ?

Exercice 34.

Soit A une algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geq 2$ sur $\mathbb{R}$. On identifie $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}.1$, où 1 est l'élément neutre de A pour la multiplication.

1. Démontrer que tout $a \in A$ non-nul est inversible.
2. Soit $a \in A$ et non dans $\mathbb{R} = \mathrm{vect}(1)$. Prouver que la famille $(1, a)$ est libre, tandis que la famille $(1, a, a^2)$ est liée.
3. En déduire l'existence de $i \in \mathrm{vect}(1, a)$ tel que $i^2 = -1$.
4. En déduire que $\dim(A) = 2$.
5. En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{C}$.