Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°10

1. Rappels sur le calcul matriciel

Exercice 1. *Inverse I*

Calculer l'inverse (si elle existe) de chacune des matrices suivantes grâce à **la formule** $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\,{}^t\mathrm{com}(M)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *Inverse II*

Calculer l'inverse (si elle existe) de chacune des matrices suivantes grâce à **la méthode du pivot de Gauss** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Matrices d'une application linéaire I*

Déterminer la matrice de chacun des endomorphismes suivants dans les bases canoniques :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, y+z, \frac{1}{2}(x+3y)) \end{array} \right.$$

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & P(0)+P(1)X+P(2)X^2+P(3)X^3 \end{array} \right.$$

Exercice 4. *Matrices d'une application linéaire II*

Déterminer la matrice de chacun des endomorphismes suivants dans les bases indiquées :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y) \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ et $\mathcal{B}' = ((1,1),(1,2))$.

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z,x,y) \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

Exercice 5. *Application linéaire associée à une matrice*

Déterminer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1))$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,-1,0),(0,0,1))$

Exercice 6. *Base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*

Soit $n \geq 1$. Déterminer une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7. *Matrices de passage*

1. Déterminer la matrices de changement de base de :
   a. $\mathcal{B} = ((2,1),(1,0))$ vers $\mathcal{B}' = ((1,2),(0,1))$
   b. $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ vers $\mathcal{B}' = ((2,1,1),(1,0,1),(1,-1,1))$
   c. $\mathcal{B} = ((3,3,3),(2,2,0),(1,0,0))$ et $\mathcal{B}' = ((0,0,3),(0,2,2),(1,1,1))$
2. Soit $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ où :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice 9.

Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par $u(x,y) = (x+2y, 2x-y, 2x+3y)$ et $v(x,y,z) = (x-2y+z, 2x+y-3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x,y,z)$ et $v \circ u(x,y)$.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{B}'_2 := \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\}$ et $\mathcal{B}'_3 := \{\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \mathcal{F}'_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ resp., où $\mathcal{E}'_1 := \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_2 := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}'_1 := \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}'_2 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}'_3 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$.
3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}'_2$ puis la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{B}'_3$.
4. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}_3$ puis dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}'_3$ et enfin celle de v dans les bases $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}'_2$.

Exercice 10.

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Exercice 11.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 12.

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\textbf{1}.\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2}.\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{3}.\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{4}.\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 14.

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Exercice 15.

Soient a, b, c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Exercice 16.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Exercice 17.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

2. Utilisation des polynômes annulateurs

Exercice 18.

Déterminer un polynôme annulateur puis le polynôme minimal de chacun des éléments suivants :

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(x,y,z) = (x,x,y)$ (Calculer f^3).
2. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(x,y,z) = (-x,y,-z)$ (Calculer f^2 !).
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer A^3 et déterminer un polynôme annulateur de A.

Exercice 19.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.
2. Ce polynôme est-il le polynôme minimal de A ?
3. Montrer que A est inversible en utilisant ce polynôme.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.