Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°10

1. Rappels sur le calcul matriciel

Exercice 1. *Inverse I*

Calculer l'inverse (si elle existe) de chacune des matrices suivantes grâce à **la formule** $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\text{com}(M)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

et B n'est pas inversible.

Exercice 2. *Inverse II*

Calculer l'inverse (si elle existe) de chacune des matrices suivantes grâce à **la méthode du pivot de Gauss** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et C n'est pas inversible.

Exercice 3. *Matrices d'une application linéaire I*

Déterminer la matrice de chacun des endomorphismes suivants dans les bases canoniques :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, y+z, \frac{1}{2}(x+3y)) \end{array} \right.$$

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & P(0)+P(1)X+P(2)X^2+P(3)X^3 \end{array} \right.$$

Correction.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}_4[X]}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *Matrices d'une application linéaire II*

Déterminer la matrice de chacun des endomorphismes suivants dans les bases indiquées :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y) \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ et $\mathcal{B}' = ((1,1),(1,2))$.

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z,x,y) \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

Correction.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. *Application linéaire associée à une matrice*

Déterminer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1))$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,-1,0),(0,0,1))$

Correction.

$f : (x, y, z) \mapsto (\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z, -y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z)$

Exercice 6. *Base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*

Soit $n \geq 1$. Déterminer une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Correction.

La famille $(g_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ où, avec $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$g_{ij}(e_j) = e_i \text{ i.e. } g_{ij}(x_1, ..., x_n) = (0, ...0, \underbrace{x_j}_{i\text{-ème coord.}}, 0..., 0)$$

On peux justifier cela en remarquant que $(g_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ est l'image réciproque de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ par l'isomorphisme $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. *Matrices de passage*

1. Déterminer la matrices de changement de base de :
   a. $\mathcal{B} = ((2, 1), (1, 0))$ vers $\mathcal{B}' = ((1, 2), (0, 1))$
   b. $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ vers $\mathcal{B}' = ((2, 1, 1), (1, 0, 1), (1, -1, 1))$
   c. $\mathcal{B} = ((3, 3, 3), (2, 2, 0), (1, 0, 0))$ et $\mathcal{B}' = ((0, 0, 3), (0, 2, 2), (1, 1, 1))$
2. Soit $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ où :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction.

1. a. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   b. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   c. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 3 & \frac{-2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{B}' = ((-2, -1, -2), (2, 0, 3), (-1, 0, -2))$

Exercice 8.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Correction.

1. Soient $X = (x,y,z)$, $X' = (x,y,z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} u(X+X') & = & u(x+x', y+y', z+z') \\ & = & (-x-x'+y+y', x+x'-y-y', -x-x'+z+z', -y-y'+z+z') \\ & = & \big((-x+y)+(-x'+y'), (x-y)+(x'-y'), (-x+z)+(-x'+z'), \\ & & \quad (-y+z)+(-y'+z')\big) \\ & = & (-x+y, x-y, -x+z, -y+z) + (-x'+y', x'-y', -x'+z', -y'+z') \\ & = & u(X)+u(X'). \end{array}$$

De même, on a

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda X) & = & u(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ & = & u(-\lambda x+\lambda y, \lambda x-\lambda y, -\lambda x+\lambda z, -\lambda y+\lambda z) \\ & = & \lambda(-x+y, x-y, -x+z, -y+z) \\ & = & \lambda u(X). \end{array}$$

Ainsi, u est linéaire. On aurait pu aussi utiliser la caractérisation des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$: chaque coordonnée de $u(x,y,z)$ s'écrit comme combinaison linéaire de (x,y,z).

2. On a

$$\begin{array}{rcl} u(\mathcal{E}_1) & = & u(1,0,0) = (-1,1,-1,0) = -\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_3 \\ u(\mathcal{E}_2) & = & u(0,1,0) = (1,-1,0,-1) = \mathcal{F}_1-\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_4 \\ u(\mathcal{E}_3) & = & u(0,0,1) = (0,0,1,1) = \mathcal{F}_3+\mathcal{F}_4. \end{array}$$

3. On applique la définition et on trouve

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 et que la famille considérée a quatre éléments, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. C'est particulièrement facile ici, car la famille est

triangulaire par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En effet, si on a $a\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_2 + cu(\mathcal{E}_1) + du(\mathcal{E}_2) = 0$, ceci se traduit en

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-c+d &=& 0 \\ b+c-d &=& 0 \\ -c &=& 0 \\ -d &=& 0 \end{array}\right. \iff a=b=c=d=0.$$

5. Il s'agit d'exprimer chaque $u(\mathcal{E}_i)$ en fonction des vecteurs de la nouvelle base. Pour deux des vecteurs, c'est très facile, car $u(\mathcal{E}_1) = u(\mathcal{E}_1)$ et $u(\mathcal{E}_2) = u(\mathcal{E}_2)$! C'est plus difficile pour $u(\mathcal{E}_3)$, qu'il faut exprimer dans la nouvelle base. Autrement dit, il faut trouver a, b, c, d de sorte que
$$a\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_2 + cu(\mathcal{E}_1) + du(\mathcal{E}_2) = (0,0,1,1).$$
Ceci revient à résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} a-c+d &=& 0 \\ b+c-d &=& 0 \\ c &=& -1 \\ d &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ c &=& -1 \\ d &=& -1 \end{array}\right.$$
Ainsi, on $u(\mathcal{E}_3) = -u(\mathcal{E}_1) - u(\mathcal{E}_2)$ et la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est donc
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.

Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par $u(x,y) = (x+2y, 2x-y, 2x+3y)$ et $v(x,y,z) = (x-2y+z, 2x+y-3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x,y,z)$ et $v \circ u(x,y)$.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{B}'_2 := \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\}$ et $\mathcal{B}'_3 := \{\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \mathcal{F}'_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ resp., où $\mathcal{E}'_1 := \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_2 := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}'_1 := \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}'_2 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}'_3 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$.
3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}'_2$ puis la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{B}'_3$.
4. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}_3$ puis dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}'_3$ et enfin celle de v dans les bases $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}'_2$.

Correction.

1. Remarquons d'abord que u et v sont clairement linéaires. Notons A (resp. B) les matrices

de u (resp. v) dans leur base canonique. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$u \circ v$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel AB. $v \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel BA. On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$u \circ v(x) = (5x - 5z, -5y + 5z, 8x - y - 7z) \text{ et } v \circ u(x, y) = (-x + 7y, -2x - 6y).$$

2. Il suffit de vérifier que les deux familles sont libres, puisqu'elles comptent le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace. Pour $\mathcal{B}_2'$, c'est clair puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour $\mathcal{B}_3'$, on traduit une égalité du type $a\mathcal{F}_1' + b\mathcal{F}_2' + c\mathcal{F}_3' = 0$ en

$$(a+b+c)\mathcal{F}_1 + (b+c)\mathcal{F}_2 + c\mathcal{F}_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. \iff a = b = c = 0.$$

3. La matrice de passage est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs exprimés en fonction des anciens vecteurs. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Notons C la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3$. Comme on ne change la base que au départ, la formule de changement de base nous donne

$$C = AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons D la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3'$. Cette fois, on change de base à la fois au départ et à l'arrivée. La formule de changement de base nous donne $D = Q^{-1}AP$. Après calculs, on trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons enfin E la matrice de v dans les nouvelles bases. La formule de changement de base nous donne $E = P^{-1}BQ$ (attention à la place de P et Q !!!). On obtient après calculs :

$$P^{-1} = P \text{ et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Correction.

On commence par chercher une base de P et une base de D. On a

$$(x,y,z) \in P \iff \left\{ \begin{array}{rcrr} x & = & x & \\ y & = & & y \\ z & = & x & -y \end{array} \right.$$

Autrement dit, si on pose $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,-1)$, alors (u,v) est une base de P. On cherche ensuite une base (ici, un vecteur directeur) de D. Clairement, $(1,-1,1)$ convient. Puisque P et D sont supplémentaires, (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la projection dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w), alors la matrice recherchée est PAP^{-1}. Or, on peut écrire P directement,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et, après calculs, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Correction.

On commence par calculer les premières valeurs de B^n. On a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, on a $B^n = 0$. En effet, c'est vrai pour

$n=3$. Si c'est vrai au rang $n \geq 3$, alors

$$B^{n+1} = B^n \times B = 0 \times B = 0.$$

Pour obtenir A, on écrit $A = I+B$ et on remarque que I et B commutent puisque $IB = BI = B$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton, ce qui est très facile ici puisque $B^n = 0$ dès que $n \geq 3$. On en déduit

$$A^n = I^n + \binom{n}{1} I^{n-1}B + \binom{n}{2} I^{n-2}B^2$$

ce qui se réécrit en

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **4.** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Correction.

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée.

1. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix}. \end{aligned}$$

Le rang de la matrice est donc égal à 2.

2. On a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rg}(B) & = & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \\ & = & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \end{array}.$$

Le rang de la matrice est donc égal à 3.

3. On a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rg}(C) & = & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \\ & = & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \end{array}.$$

Le rang de cette matrice est donc égal à 2.

4. On a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rg}(D) & = & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \\ & = & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \\ L_4 + 3L_2 \end{array} \end{array}.$$

Le rang de cette matrice est donc égal à 2.

Exercice 13.

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Correction.

1. On développe suivant la première colonne. On trouve

$$\Delta_{n+2} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

   Le premier déterminant est Δ_{n+1}. Pour le second, on développe par rapport à la première ligne, et on retrouve alors Δ_n (on a barré 2 lignes et 2 colonnes). Ceci nous donne la formule voulue.

2. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = 3r - 2$. Ses racines sont $r = 1$ et $r = 2$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = \lambda 2^n + \mu 1^n.$$

   Mais $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu & = & 3 \\ 4\lambda + \mu & = & 7. \end{cases}$$

   On en déduit immédiatement que $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 14.

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynômiale de x dont on précisera le degré.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Correction.

1. Un calcul immédiat montrer que $V(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2-\alpha_1$. On a ensuite :

$$\begin{aligned}
V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & \alpha_3^2-\alpha_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 \\ (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3+\alpha_1) \end{vmatrix} \\
&= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha_3+\alpha_1 \end{vmatrix} \\
&= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2).
\end{aligned}$$

2. On pose $P(x)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},x)$. Alors si on développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on trouve que P est un polynôme de degré au plus $n-1$, et de coefficient devant x^{n-1} égal à $V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$.
3. On remarque que $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ sont n racines distinctes de P (puisque dans ce cas le déterminant comporte deux colonnes identiques). On en déduit donc, d'après la question précédente, que

$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},x)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(x-\alpha_i).$$

4. On évalue la formule précédente en $x=\alpha_n$. En s'aidant des deux premières questions, on démontre par récurrence que

$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j-\alpha_i).$$

Exercice 15.

Soient a,b,c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n\times n$ suivant :

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n\geq 1$, on a $\Delta_{n+2}=a\Delta_{n+1}-bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2=4bc$. Démontrer que, pour tout $n\geq 1$, on a $\Delta_n=\frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Correction.

1. On développe le déterminant par rapport à la première colonne. On trouve :
$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - c \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & & \\ c & a & b & 0 & \dots \\ 0 & c & a & b & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}.$$
On développe encore le second déterminant par rapport à la première ligne, et on trouve le résultat demandé :
$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$
2. On va procéder par récurrence **double**. Précisément, on va prouver par récurrence sur $n \geq 1$ l'hypothèse H_n suivante :

> H_n : "$\Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}$ et $\Delta_{n+1} = \frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}}$."

Exercice 16.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega = e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$
Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Correction.

Effectuons le calcul demandé. On obtient que la k-ième colonne de AM est égale à la k-ième colonne de M multipliée par $a_1 + a_2\omega^{k-1} + \dots + a_n\omega^{(k-1)(n-1)}$. En notant
$$P(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1},$$
on a donc d'une part
$$\det(AM) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\det(M)$$
et d'autre part
$$\det(AM) = \det(A)\det(M).$$
Puisque le déterminant de M est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde), on a :
$$\det(A) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}).$$

Exercice 17.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Correction.

1. Cherchons la matrice de u dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. On a $u(1) = 1$ et pour $j \geq 1$, $u(X^j) = X^j + jX^{j-1}$. Autrement dit, la matrice de u dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice est triangulaire supérieure et on en déduit aisément que $\det(u) = 1$.
2. On peut appliquer la même méthode ou remarquer plus simplement que u n'est pas injective, car les polynômes constants sont dans $\ker(u)$. Ainsi, u n'étant pas inversible, $\det(u) = 0$.
3. On calcule toujours la matrice de u dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. Puisque $u(1) = 1$ et $u(X^j) = jX^j + 1$, la matrice est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $1, 1, 2, \dots, n$. Ainsi, $\det(u) = n!$.

2. Utilisation des polynômes annulateurs

Exercice 18.

Déterminer un polynôme annulateur puis le polynôme minimal de chacun des éléments suivants :

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(x, y, z) = (x, x, y)$ (Calculer f^3).
2. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(x, y, z) = (-x, y, -z)$ (Calculer f^2 !).
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer A^3 et déterminer un polynôme annulateur de A.

Correction.

1. On a, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
$$f^3(x, y, z) = f^2(x, x, y) = f(x, x, x) = (x, x, x)$$
Donc $f^3 = f^2$.
Par suite, $P = X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$ est un polynôme annulateur de f et donc P est le polynôme minimal de f car ni X^2, ni $X - 1$ ne sont des polynômes annulateurs de f.

2. On a, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^2(x, y, z) = f(-x, y, -z) = (x, y, z)$$

Donc $f^2 = \mathrm{id}$.
Par suite, $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de f et donc P est le polynôme minimal de f car ni $X+1$, ni $X-1$ ne sont des polynômes annulateurs de f.

3. On a

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A,$$

donc $P = X^3 - 2X = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ est un polynôme annulateur de A et donc P est le polynôme minimal de A car des diviseurs stricts de P n'annule A.

Exercice 19.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.
2. Ce polynôme est-il le polynôme minimal de A ?
3. Montrer que A est inversible en utilisant ce polynôme.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.