Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°11

1. Exercices basiques

Exercice 1.

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{C}^\mathbb{N}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 4.

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Exercice 5.

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 7.

Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$, lesquelles sont diagonalisables ???

Exercice 8.

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Soient f, g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f est diagonalisable. Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Exercice 10.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

1. Dans cette question, on suppose f et g inversibles.
   (a) En utilisant $\det(BAB - \lambda B)$, démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ. Démontrer les inclusions

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$

(c) Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ?

(d) Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.

2. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.

(a) Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que

$$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$

Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?

(c) Déduire de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

(d) Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 11.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

1. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

Exercice 12.

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 13.

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

3. Diagonaliser U.

Exercice 14.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres associées à deux autres valeurs propres, et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 15.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 16.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Calculer A^n en fonction de n.
3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{array} \right.$$
pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 17.

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A.
2. En déduire toutes les matrices M qui commutent avec A.

Exercice 18.

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Exercice 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonalisables.
2. Plus généralement, soit $u_1, \dots, u_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux, $m \geq 1$. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i.

Exercice 20.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u.

1. u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Démontrer que pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Montrer que la matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est indépendante du choix de x.

Exercice 21.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle tel que $A^2 = 0$ et soit r le rang de A. Démontrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 22.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $1, 2, \dots, n$ et les autres coefficients sont tous égaux à 1. Soit P_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Démontrer que $P_{n+1}(X) = (n-X)P_n(X) + (-1)^n X(X-1)\dots(X-(n-1))$.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $(-1)^k P_n(k) > 0$.
3. En déduire que M_n est diagonalisable et que chaque intervalle $]0,1[$, $]1,2[, \dots,]n-1, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de M_n.

Exercice 23.

Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$
Calculer P_1 et P_2.
2. Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Démontrer que
$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$
3. En déduire que A_n est diagonalisable.

Exercice 24.

On considère, pour $n \geq 4$, la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $i = n$ ou $j = 1$ ou $j = n$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Démontrer que A est diagonalisable.

Exercice 25.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 26.

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note $\mathcal{C}_f$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f.

1. Démontrer que $g \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

2. En déduire que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \mathrm{mult}(\lambda)^2$, où $\mathrm{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.
3. On suppose en outre que les valeurs propres de f sont simples. Démontrer que $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -Id$.

1. Donner un exemple de tel endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que, pour tout x de E, $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
4. En déduire que si $\dim E = 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ forme une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 28.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Démontrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $QAQ^{-1} = B$.

Exercice 29.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.