Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°11

1. Exercices basiques

Exercice 1.

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Correction.

1. C'est faux ! Ou un endomorphisme n'admet pas de vecteurs propres, ou il en admet une infinité. En effet, si x est vecteur propre, tous ses multiples non nuls sont vecteurs propres.
2. C'est vrai ! Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors $A^2 = PD^2P^{-1}$ et D^2 est diagonale.
3. Non ! Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable alors que son carré est la matrice nulle qui est diagonale.
4. C'est vrai ! Le polynôme caractéristique de A est de degré impair, et tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle (appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec le calcul des limites en $\pm\infty$).
5. Sûrement pas ! Prendre par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Correction.

f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si et et seulement si $f' = \lambda f$. f est donc un multiple de la fonction $x \mapsto \exp(\lambda x)$, et la réciproque est vraie. Autrement dit, tous les réels sont des valeurs propres pour D, et $\exp(\lambda x)$ est une base de l'espace propre associé à λ.

Exercice 3.

Soit $E=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0=u_0$ et pour tout $n\geq 1$,

$$v_n=\frac{u_n+u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Correction.

Soit (u_n) une valeur propre associée au vecteur propre λ. Alors on a $u_0=\lambda u_0$ et pour tout $n\geq 1$, on a

$$\frac{u_n+u_{n-1}}{2}=\lambda u_n \iff (1-2\lambda)u_n=-u_{n-1}.$$

On distingue alors trois cas :

- Si $\lambda=1$, alors on a $u_0=u_0$ (qui n'implique plus rien sur u_0), puis pour tout $n\geq 1$, on a $u_n=u_{n-1}$. Réciproquement, toute suite constante est bien vecteur propre de ϕ pour la valeur propre 1. On en déduit que 1 est une valeur propre de ϕ dont l'espace propre associé est constitué par les suites constantes.
- Si $\lambda=1/2$, alors le système devient $u_0=0$ et pour tout $n\geq 1$, $u_{n-1}=0$ ce qui implique que (u_n) est la suite nulle et donc $1/2$ n'est pas valeur propre de ϕ.
- Dans tous les autres cas, le système devient $u_0=0$ et pour tout $n\geq 1$,

  $$u_n=\frac{1}{2\lambda-1}u_{n-1}.$$

  Ainsi, la suite (u_n) est là-encore la suite nulle, et λ n'est pas valeur propre.

En conclusion, la seule valeur propre est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

Exercice 4.

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&3&2\\-2&5&2\\2&-3&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Correction.

Procédons d'abord avec A. Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(X)=(X-1)(X-2)(X+4).$$

Il est scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable. Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1, on résoud AX=X, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2y-z & = & 0\\ 3x-3y & = & 0\\ -2x+2y & = & 0\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x=y=z$ et un vecteur propre est donc donnée par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On fait de même pour 2 et -4, et on trouve respectivement $\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. La matrice A est donc semblable à $\mathrm{diag}(1,2,-4)$, la matrice de passage étant

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Poursuivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_B(X)=X^3-5X^2+8X-4.$$

1 est racine évidente, on factorise par $X-1$ et finalement on trouve

$$\chi_B(X)=(X-1)(X-2)^2.$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant $BX=X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y+2z & = & 0\\ -2x+4y+2z & = & 0\\ 2x-3y-z & = & 0\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x=y=-z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+3y+2z & = & 0\\ -2x+3y+2z & = & 0\\ 2x-3y-2z & = & 0\end{array}\right.$$

Ces trois équations se ramènent à $2x-3y-2z=0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. B est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1,2,2)$, la matrice de passage P étant donnée par

$$P=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X)=(1-X)^2(2-X)$. On procède exactement comme précédemment, et on trouve que (u_1,u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1, avec $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2, avec $u_3 = (0,0,1)$. Ainsi, C s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Correction.

La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont données par les éléments de la diagonale. La seule valeur propre de A est donc π. Si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P(\pi I_3)P^{-1}.$$

Mais puisque I_3 commute avec toutes les matrices, on aurait

$$A = \pi I_3 P P^{-1} = \pi I_3.$$

Ce n'est pas le cas : A n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 6.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Correction.

On calcule le polynôme caractéristique de A et on trouve facilement que

$$\chi_a(X) = X\big(X^2 + (ab + bc + ca)\big).$$

Posons $\delta = ab + bc + ca$. On discute alors suivant la valeur de δ :

— Si $\delta > 0$, le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc la matrice n'est pas diagonalisable.

— Si $\delta < 0$, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples : la matrice est diagonalisable.

— Si $\delta = 0$, alors 0 est racine de multiplicité 3 du polynôme caractéristique. La matrice n'est diagonalisable que s'il s'agit de la matrice nulle, c'est-à-dire si et seulement si $a = b = c = 0$.

Exercice 7.

Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$, lesquelles sont diagonalisables ???

Correction.

Les matrices $E_{i,i}$ sont diagonales, donc diagonalisables ! Si $i \neq j$, alors le polynôme caractéristique de $E_{i,j}$ est $(-1)^n X^n$. Autrement dit, 0 est la seule valeur propre de $E_{i,j}$. Cette matrice est donc diagonalisable si et seulement si c'est la matrice nulle. Et ce n'est pas le cas ! Donc $E_{i,j}$ est diagonalisable si et seulement si $i = j$.

Exercice 8.

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

Le calcul du polynôme caractéristique ne pose pas de problèmes, et on trouve, sous forme factorisée, $\chi_A(x) = (2-x)(4-x)^2$. On ne peut pas conclure directement que A est diagonalisable, il faut déterminer une base des sous-espaces propres associés. Pour la valeur propre 2, on résoud l'équation $AX = 2X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& -2x \\ z &=& x \end{array} \right.$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cherchons ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 4. On doit résoudre $AX = 4X$ et on trouve cette fois le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& -x \end{array} \right.$$

Une base de l'espace propre associé à la valeur propre 4 est donc donné par (u_2, u_3), avec $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, donc A est diagonalisable. Plus précisément on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. D^n est tout simplement égale à

$$D = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Après un petit calcul, on trouve que

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit finalement que

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2.4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.

Soient f, g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f est diagonalisable. Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Correction.

D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P, en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f. Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi

$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$

Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f. Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i, où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

Exercice 10.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

1. Dans cette question, on suppose f et g inversibles.
   (a) En utilisant $\det(BAB - \lambda B)$, démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ. Démontrer les inclusions
   $$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$
   (c) Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ?
   (d) Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.
2. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.
   (a) Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que
   $$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$
   Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?
   (c) Déduire de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
   (d) Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

Correction.

1. (a) On écrit d'une part que
   $$BAB - \lambda B = B(AB - \lambda I)$$
   et donc
   $$\det(BAB - \lambda I) = \det(B)P_{AB}(\lambda).$$
   En écrivant d'autre part que
   $$BAB - \lambda I = (BA - \lambda I)B,$$
   on obtient cette fois que
   $$\det(BAB - \lambda I) = P_{BA}(\lambda)\det(B).$$
   On peut simplifier par $\det(B)$ qui est non-nul et on trouve que $P_{AB} = P_{BA}$. AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $f \circ g(x) = \lambda x$. On a
   $$g \circ f\big(g(x)\big) = g\big(f \circ g(x)\big) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$
   Ceci prouve que $g(x) \in F_\lambda$, et donc que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a aussi $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

(c) f et g étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :

$$\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda).$$

D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que

$$\dim(g(E_\lambda)) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) \leq \dim(E_\lambda).$$

Si on met tout ensemble, on en déduit que

$$\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda).$$

Ainsi, les espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension.

(d) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f \circ g$. Alors, puisque $f \circ g$ est diagonalisable, on a

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n.$$

D'après le résultat de la question précédente, on a aussi

$$\dim(F_{\lambda_1}) + \dots + \dim(F_{\lambda_p}) = n.$$

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ est (au moins) égale à n. C'est bien que $g \circ f$ est diagonalisable.

2. (a) Si 0 est valeur propre de $f \circ g$, alors $\det(AB) = 0$. Mais $\det(AB) = \det(BA) = 0$, et donc 0 est valeur propre de $g \circ f$.

(b) On utilise la relation suivante :

$$(AB - \alpha I)C = I \implies ABC = I + \alpha C.$$

Développant, on trouve :

$$\begin{aligned}(BA - \alpha I)(BCA - I) &= B(ABC)A - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= BA + \alpha BCA - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= \alpha I.\end{aligned}$$

On en déduit que $\det(BA - \alpha I)$ est non-nul, puisque

$$\det(BA - \alpha I) \times \det(BCA - I) = \alpha^n \neq 0,$$

et donc que $BA - \alpha I$ est inversible.

(c) On raisonne par contraposée. Si α n'est pas une valeur propre de $f \circ g$, alors $AB - \alpha I$ est inversible, et par la question précédente, $BA - \alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est pas une valeur propre de $g \circ f$. Par contraposée, toute valeur propre de $g \circ f$ est une valeur propre de $f \circ g$. Par symétrie du rôle joué par f et g, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

(d) On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA est diagonalisable, tandis que AB ne l'est pas.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 11.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

1. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

Correction.

1. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ soit une valeur propre de A et soit Z un vecteur propre non-nul associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. La i-ème coordonnée de AZ est $\sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$ et ceci doit être égal à λz_i. Prenant les valeurs absolues et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient
$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$
où on a utilisé aussi que $a_{i,j} \geq 0$ et que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On a donc obtenu $|\lambda||z_i| \leq |z_i|$. Comme $|z_i| \neq 0$ (sinon Z serait le vecteur nul), ceci entraîne encore que $|\lambda| \leq 1$.
2. Il suffit de choisir $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ pour remarquer que $AZ = Z$. Ainsi, Z est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Exercice 12.

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} \\
&=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ m-2 & m-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(2-X)(m-X).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc 1,2 et m. En particulier, si $m=1$ ou 2, f n'admet que deux valeurs propres.

2. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable. Si $m=1$, le polynôme caractéristique de f est $(1-X)^2(2-X)$. f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Cherchons ce sous-espace (rappelons qu'on a $m=1$). Pour $u=(x,y,z)$, on a

$$f(u)=u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. L'espace est de dimension $1 \neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable. Supposons maintenant $m=2$. On doit chercher cette fois la dimension de $\ker(f-2I)$. On a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+z &=& 0 \\ -x+z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& x \end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$. En particulier, $\ker(f-2I)$ est de dimension 2 et f est diagonalisable.

3. On va commencer par diagonaliser f. On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Pour la valeur propre 1 (attention, on travaille cette fois avec $m=2$), on a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. Notons $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ et $w=(1,0,1)$. Alors (u,v,w) est une base de vecteurs propres de f et dans cette base, la matrice de f est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base (u,v,w). La matrice P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $A = PDP^{-1}$. On doit calculer P^{-1}. On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De $A = PDP^{-1}$, on déduit facilement par récurrence $A^k = PD^kP^{-1}$. Mais puisque D est diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent donne finalement

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
3. Diagonaliser U.

Correction.

1. On vérifie facilement que
$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.
2. Le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U. Il est scindé, à racines simples (-1 et 3), et donc U est diagonalisable. On peut même aller un cran plus loin et affirmer que $X^2 - 2X - 3$ est le polynôme minimal de U, puisqu'aucun polynôme de degré un n'est polynôme annulateur de U qui n'est pas multiple de I_4. Ainsi, les valeurs propres de U sont -1 et 3.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On commence par résoudre $UX = -X$:

$$\begin{aligned} UX = -X \quad & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y+z+t & = & -x \\ x+z+t & = & -y \\ x+y+t & = & -z \\ x+y+z & = & -t \end{array} \right. \\ & \iff \quad x+y+z+t = 0 \\ & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-z-t \\ y & = & y \\ z & = & z \\ t & = & t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, -1 est une valeur propre de multiplicité 3, et une base de l'espace propre associé est donnée par les vecteurs $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$. Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3, dont on sait désormais qu'il est de dimension 1, on peut résoudre $UX = 3X$. On peut aussi remarquer que la somme de chaque ligne de la matrice fait 3. Ainsi, le vecteur $(1,1,1,1)$ est vecteur propre de U pour la valeur propre 3. Il constitue une base de l'espace propre associé à la valeur propre 3.

Exercice 14.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres associées à deux autres valeurs propres, et en déduire que A est diagonalisable.

Correction.

1. Puisque la matrice n'admet que deux colonnes distinctes, elle est de rang au plus 2. De plus, la matrice extraite $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est inversible puisque son déterminant est $a^2 - b^2 \neq 0$. Le rang de la matrice est 2 ce qui fait, d'après le théorème du rang, que 0 est valeur propre de A de multiplicité $2n-2$.
2. Utilisons la structure de la matrice. On remarque que les sommes des coefficients sur chaque

ligne sont égales, et égales à $n(a+b)$. Ceci signifie que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $n(a+b)$. De même, en faisant cette fois des sommes "alternées", on remarque que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $n(a-b)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, et $a+b$ comme $a-b$ sont non nuls. On a donc bien trouvé notre base de vecteurs propres, et A est diagonalisable.

Exercice 15.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Correction.

Soit $X = \binom{x}{y}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors on a :

$$BX = \lambda X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} Ay & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} Ay & = & \lambda^2 y \\ x & = & \lambda y \end{array} \right.$$

Ainsi, λ est valeur propre de B si et seulement si λ^2 est valeur propre de A, et $X = \binom{x}{y}$ est vecteur propre de B pour la valeur propre λ si et seulement si $x = \lambda y$ et y est vecteur propre de A pour la valeur propre λ^2. Pour $\mu \in \mathbb{C}$, notons $E_\mu = \ker(A - \mu I_n)$ et $F_\mu = \ker(B - \mu I_{2n})$. Soit $\mu = \lambda^2 \in \mathbb{C}$. Si $(y_1, \dots, y_k)$ est une base de E_μ, alors en posant $X_i = \binom{\lambda y_i}{y_i}$, $(X_1, \dots, X_k)$ est une base de F_λ. Puisque A est diagonalisable, on sait que

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = n,$$

où $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont les valeurs propres de A. Si $\mu_i \neq 0$ pour tout i, chaque μ_i admet deux racines carrés complexes distinctes λ_i, λ_i', et on a

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(F_{\lambda_i}) + \sum_{i=1}^{p} \dim(F_{\lambda_i'}) = 2\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = 2n,$$

et donc B est diagonalisable. Au contraire, si $\mu_1 = 0$, alors on obtient une seule racine carrée, qui vaut 0, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de B vaut

$$\dim(E_1) + 2\sum_{i=2}^{p} \dim(E_{\mu_i}) = 2n - \dim(E_1) < 2n.$$

On en conclut que B est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 16.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Calculer A^n en fonction de n.
3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$
pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On trouve
$$P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5).$$
$A \in M_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres, $-1, 2, 5$: A est donc diagonalisable. On cherche les sous-espaces propres associés. Pour -1, on a, pour $X = (x, y, z)$,
$$AX = -X \iff \begin{cases} -3x - 6y &= 0 \\ 3x + 6y &= 0 \\ 3x + 6y + 6z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2y \\ y &= y \\ z &= 0 \end{cases}$$
Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. On fait de même avec 2, et on trouve (par exemple) le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5, et on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Ainsi, en posant
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
on a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $A=PDP^{-1}$, ce qui entraîne par récurrence $A=PD^nP^{-1}$. D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n. En effectuant les deux produits de matrice, on trouve finalement :

$$A^n=\begin{pmatrix} 2(-1)^n-2^n & 2(-1)^n-2^{n+1} & 0\\ (-1)^{n+1}+2^n & (-1)^{n+1}+2^{n+1} & 0\\ -2^n+5^n & -2^{n+1}+2.5^n & 5^n\end{pmatrix}.$$

3. On a $X_{n+1}=AX_n$. Par récurrence, on a $X_n=A^nX_0$. Grâce au calcul de A^n effectué à la question précédente, on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_n &=& (2(-1)^n-2^n)u_0+(2(-1)^n-2^{n+1})v_0\\ v_n &=& ((-1)^{n+1}+2^n)u_0+((-1)^{n+1}+2^{n+1})v_0\\ w_n &=& (-2^n+5^n)u_0+(-2^{n+1}+2.5^n)v_0+5^nw_0.\end{array}\right.$$

Exercice 17.

Soit A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A.
2. En déduire toutes les matrices M qui commutent avec A.

Correction.

1. La diagonalisation de A ne pose pas de problèmes. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)$. Il est scindé à racines simples, et donc A est diagonalisable. En particulier, il existe P inversible telle que $A=PDP^{-1}$ avec

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

2. On va commencer par déterminer les matrices $N=(n_{i,j})$ qui commutent avec D. On remarque que

$$ND=\begin{pmatrix}1n_{1,1}&2n_{1,2}&3n_{1,3}\\1n_{2,1}&2n_{2,2}&3n_{2,3}\\1n_{3,1}&2n_{3,2}&3n_{3,3}\end{pmatrix}\text{ et }DN=\begin{pmatrix}1n_{1,1}&1n_{1,2}&1n_{1,3}\\2n_{2,1}&2n_{2,2}&2n_{2,3}\\3n_{3,1}&3n_{3,2}&3n_{3,3}\end{pmatrix}.$$

Pour que $ND=DN$, il est donc nécessaire et suffisant que N soit une matrice diagonale,

$$N=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}.$$

Ensuite, on remarque que si M commute avec A, alors

$$PDP^{-1}M=MPDP^{-1}\implies (P^{-1}MP)D=D(P^{-1}MP)$$

et donc M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D, donc si et seulement si cette matrice est diagonale. Après calcul de P et de P^{-1}, on trouve que M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & \frac{-a+c}{2} \\ 2c-2b & -2b+c & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 18.

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Correction.

Contrairement à ce que la formulation de la question suggère, c'est effectivement possible. En effet, considérons, pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, la matrice

$$M_{i,j} = D + E_{i,j},$$

où D est la matrice diagonale ayant sur la diagonale les nombres $1,\dots,n$. Pour $i=j$, posons $M_{i,i} = E_{i,i}$. Alors chaque matrice $M_{i,j}$ est diagonalisable. C'est évident si $i=j$ (la matrice est déjà diagonale), et si $i \neq j$, alors $M_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont tous les coefficients sur la diagonale sont différents. Ainsi, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et $M_{i,j}$ est diagonalisable. De plus, $(M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que c'est une famille génératrice, puisqu'on a une famille de n^2 éléments dans un espace de dimension n^2. Prenons $A = (a_{i,j})$ une matrice. Alors, $B = A - \sum_{i\neq j} a_{i,j}M_{i,j}$ est une matrice diagonale (si vous n'êtes pas convaincu, faites un calcul explicite pour $n=2$). Mais il est clair que chaque matrice diagonale se décompose comme somme des $E_{i,i}$, ie $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_{i,i}$. Ainsi, toute matrice A est bien combinaison linéaire des $M_{i,j}$.

Exercice 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonalisables.
2. Plus généralement, soit $u_1,\dots,u_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux, $m \geq 1$. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i.

Correction.

1. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres de u. Alors, pour tout $i = 1,\dots,p$, puisque u et v commutent, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Notons v_i la restriction de v à ce sous-espace. v_i est encore diagonalisable. En particulier, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(u)$ constituée de vecteurs propres de v_i, donc de v. Observons que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de u puisque éléments de $E_{\lambda_i}(u)$. Maintenant, puisque u est diagonalisable, $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup B_p$ est une base de E constituée de vecteurs propres pour u et pour v, d'où le résultat.

2. On procède par récurrence sur m. Précisément, on prouve pour $m \geq 1$ la propriété suivante :

> $\mathcal{P}_m$: Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, pour toute famille de m endomorphismes de E, $u_1, \dots, u_m$, diagonalisables et commutant deux à deux, il existe une base diagonalisant tous les u_i.

Exercice 20.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u.

1. u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Démontrer que pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Montrer que la matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est indépendante du choix de x.

Correction.

1. Si u admettait un vecteur propre x, alors $\mathrm{vect}(x)$ serait un sous-espace de E stable par u différent de $\{0\}$ et de E, ce qui est impossible.
2. Imaginons que la famille soit liée. Alors il existe $p \leq n-1$ et des scalaires $a_0, \dots, a_{p-1}$ tels que
$$u^p(x) = a_0 x + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x).$$
On vérifie alors que l'espace vectoriel $\mathrm{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u.
3. Soit $b_0, \dots, b_{n-1}$ des scalaires tels que
$$u^n(x) = b_0 x + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}(x).$$
La matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est alors
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & \ddots & 0 & b_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{n-1}. \end{pmatrix}.$$
Remarquons aussi que, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, on a
$$u^n(u^i(x)) = b_0 u^i(x) + b_1 u(u^i(x)) + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}(u^i(x)).$$
Puisque $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, on en déduit que pour tout $y \in E$, on a
$$u^n(y) = b_0 y + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}(y)$$
et donc la matrice de u dans la base $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$ est identique à celle que l'on a écrite ci-dessus.

Exercice 21.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle tel que $A^2 = 0$ et soit r le rang de A. Démontrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Si on regarde bien la matrice à laquelle A doit être semblable, on remarque que les $n-r$ premiers vecteurs doivent être dans $\ker f$, que les r premiers doivent être dans $\mathrm{Im}(f)$, et les r derniers sont définis en fonction des r premiers. On n'a donc pas trop le choix ! La condition $A^2 = 0$ entraîne que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\ker(f)$. Soit enfin, pour $i = 1, \dots, r$, e_{n-r+i} un vecteur tel que $f(e_{n-r+i}) = e_i$ (un tel vecteur existe car e_i est dans $\mathrm{Im}(f)$). Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc est une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, si

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0,$$

on applique f et on trouve

$$\lambda_{n-r+1} e_1 + \cdots + \lambda_n e_r = 0.$$

La famille $(e_1, \dots, e_r)$ étant une base de $\mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $\lambda_{n-r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. On obtient alors

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$$

ce qui implique à son tour que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$ puisque la famille $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\ker(f)$. Maintenant, dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui prouve bien que A est semblable à cette dernière matrice.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 22.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $1, 2, \dots, n$ et les autres coefficients sont tous égaux à 1. Soit P_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Démontrer que $P_{n+1}(X) = (n - X)P_n(X) + (-1)^n X(X-1)\dots(X-(n-1))$.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $(-1)^k P_n(k) > 0$.
3. En déduire que M_n est diagonalisable et que chaque intervalle $]0, 1[,]1, 2[, \dots,]n-1, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de M_n.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de M_n en retirant la première colonne à la dernière,

puis en développant suivant la dernière colonne. On trouve :

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & \dots & \dots & X \\ 1 & 2-X & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & (n-1)-X \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}X \begin{vmatrix} 1 & 2-X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-X & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n-1-X \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} + \big((n-1)-X\big)P_{n-1}(X).
\end{aligned}$$

Pour calculer l'avant-dernier déterminant qui apparait, on retranche l'avant-dernière ligne à la dernière, puis la ligne $n-2$ à la ligne $n-1$, etc. jusqu'à retirer la ligne 1 à la ligne 2. On trouve :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-X & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n-1-X \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & X-1 & * & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & X-(n-2) \end{vmatrix}.$$

La matrice que l'on obtient est diagonale, son déterminant est le produit des termes diagonaux, et on obtient bien le résultat voulu.

2. On procède par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n=1$, puisque $P_1(X) = 1-X$ et $P_n(0) > 0$. Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$. Alors, pour $k \leq n-1$, d'après la formule précédente, on a

$$(-1)^k P_{n+1}(k) = (-1)^k P_n(k) \times (n-k) + 0 > 0.$$

Pour $k = n$, alors

$$(-1)^n P_{n+1}(n) = 0 + n! > 0.$$

3. Pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$, le résultat de la question précédente nous dit que $P_n(k)$ et $P_n(k+1)$ sont de signe contraire. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n possède au moins une racine dans l'intervalle $]k, k+1[$, ce qui nous donne $n-1$ racines distinctes. De plus, la limite de P_n en $+\infty$ est $+\infty$ si n est pair, et $-\infty$ si n est impair. Comme $P_n(n-1)$ est positif si n est impair et $P_n(n-1)$ est négatif si n est pair, on trouve encore, par le même théorème, une racine dans l'intervalle $[n, +\infty[$. On a trouvé n racines distinctes pour le polynôme caractéristique de M_n, qui est une matrice d'ordre n. Ainsi, M_n est diagonalisable, et on a trouvé toutes les valeurs propres de M_n. Il y en a bien exactement une dans chaque intervalle proposé.

Exercice 23.

Pour $n \geq 1$, soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$
Calculer P_1 et P_2.
2. Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Démontrer que
$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$
3. En déduire que A_n est diagonalisable.

Correction.

1. On développe le déterminant suivant la première colonne. On trouve
$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$
On développe ensuite suivant la première ligne et on trouve le résultat demandé. On a par ailleurs $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$.
2. On va procéder par récurrence double. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ et pour $n = 2$ car
$$\begin{array}{rcl} \sin(3\alpha) & = & \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) \\ & = & 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin(\alpha) \\ & = & \sin(\alpha)\left((2\cos\alpha)^2 - 1\right). \end{array}$$
Si le résultat est vrai aux rang $n-2$ et $n-1$, alors en utilisant le résultat de la première question, on a
$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha)P_n(x) & = & (2\cos\alpha)\sin(\alpha)P_{n-1}(x) - \sin(\alpha)P_{n-2}(x) \\ & = & 2\cos\alpha\sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha)) \\ & = & \sin((n+1)\alpha) + \sin((n-1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha) \\ & = & \sin((n+1)\alpha) \end{array}$$
ce qui prouve que le résultat est encore vrai au rang n.

3. L'équation $\sin((n+1)\alpha) = 0$ admet n racines dans l'intervalle $]0,\pi[$ qui sont les réels $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1,\dots,n$. Par bijectivité de la fonction cos sur l'intervalle $]0,\pi[$, les n réels $x_k = 2\cos(\alpha_k)$, $k = 1,\dots,n$ sont distincts et ce sont des racines de P_n. P_n, qui est de degré n, et donc scindé à racines simples. Puisqu'il s'agit du polynôme caractéristique de A_n, on en déduit que A_n est diagonalisable.

Exercice 24.

On considère, pour $n \geq 4$, la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $i = n$ ou $j = 1$ ou $j = n$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Démontrer que A est diagonalisable.

Correction.

On peut commencer par calculer le rang de A. Il est facile de vérifier qu'il est égal à 2. En effet, en enlevant la dernière colonne à la première colonne, et la deuxième colonne aux colonnes $3,\dots,n-1$, on trouve que le rang de A est égal au rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette dernière matrice est clairement égal à 2. Ainsi, la dimension de $\ker A$ est égale à $n-2$. Il suffit alors de vérifier que A admet deux valeurs propres distinctes, et différentes de 0, pour prouver que A est diagonalisable. Pour cela, on va calculer le polynôme caractéristique de A. En réalisant les mêmes opérations élémentaires que pour le calcul du rang, on trouve

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -X & X & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X & 1 & 0 & \dots & 1-X \end{vmatrix}.$$

On ajoute ensuite la dernière ligne à la première, puis les lignes $3,\dots,n-2$ à la deuxième ligne. On peut alors finir le calcul du polynôme caractéristique (en développant par rapport aux colonnes ne contenant plus qu'un terme non nul) :

$$\begin{aligned} C_A(X) &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 2-X \\ 0 & -X & 0 & \dots & n-2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X & 1 & 0 & \dots & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1}X^{n-2}\begin{vmatrix} 2 & 2-X \\ -X & n-2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1}X^{n-2}(-X^2+2X+2n-4). \end{aligned}$$

Le polynôme $-X^2 + 2X + 2n - 4$ admet deux racines distinctes et différentes de zéro (son discriminant vaut $8n - 12$, il est strictement positif car on a supposé $n \geq 4$). La matrice A est donc diagonalisable.

Exercice 25.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

Correction.

Commençons par prouver le sens direct. Soit $n = \dim E$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E constituée de vecteurs propres pour u. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p < n$ et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de F. Alors, par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathcal{B}$ tels que $(u_1, \dots, u_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E. Soit $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors G est stable par u et c'est un supplémentaire de F. Réciproquement, on construit par récurrence sur $p \leq n$ une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs propres de u. Le cas $p = n$ donnera la base voulue. Construisons d'abord e_1. Soit H n'importe quel hyperplan de E. Il possède un supplémentaire stable, autrement dit il existe $e_1 \in E$ tel que $\mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par u. Ainsi, e_1 est un vecteur propre de u. Supposons $(e_1, \dots, e_p)$ construits, avec $p < n$, et construisons e_{p+1}. Soit H un hyperplan de E contenant $(e_1, \dots, e_p)$. Il possède un supplémentaire stable par u. Autrement dit, il existe $e_{p+1} \notin H$ qui est un vecteur propre de u. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre par hypothèse de récurrence, et le vecteur e_{p+1} n'étant pas dans H, la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est bien une famille libre de vecteurs propres de u.

Exercice 26.

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note $\mathcal{C}_f$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f.

1. Démontrer que $g \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.
2. En déduire que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \mathrm{mult}(\lambda)^2$, où $\mathrm{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.
3. On suppose en outre que les valeurs propres de f sont simples. Démontrer que $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Correction.

1. D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P, en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f. Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi

$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$

Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f. Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i, où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

2. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f et g_i la restriction de g à $E_{\lambda_i}(f)$. Alors g est uniquement déterminé par les g_i. De plus, g_i peut être n'importe quel endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$. Autrement dit, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_f & \to & \prod_{i=1}^p \mathcal{L}\big(E_{\lambda_i}(f)\big) \\ g & \mapsto & (g_1, \dots, g_p) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. L'espace $\mathcal{L}\big(E_{\lambda_i}(f)\big)$ ayant pour dimension $\sum_{i=1}^p \mathrm{mult}(\lambda_i)^2$, il en est de même de $\mathcal{C}_f$.

3. D'après la question précédente, $\mathcal{C}_f$ est de dimension n. La famille $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ étant clairement une famille d'éléments de $\mathcal{C}_f$, il suffit de prouver que c'est une famille libre. Ceci peut se démontrer avec un argument de polynôme minimal. En effet, si $\lambda_0 Id + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$, alors le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ annule f. Il est divisé par le polynôme minimal de f. Ce polynôme minimal est de degré n, car les valeurs propres de f sont toutes distinctes. Donc $P = 0$ et la famille est bien libre.

Exercice 27.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -Id$.

1. Donner un exemple de tel endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que, pour tout x de E, $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
4. En déduire que si $\dim E = 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ forme une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Correction.

1. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul matriciel montre que $f^2 = -Id$.

2. Si λ est une valeur propre associée au vecteur propre x, la condition $f^2(x) = -x$ entraîne que $\lambda^2 = -1$: il n'existe pas de valeurs propres réelles. Si l'espace était de dimension impaire, le polynome caractéristique serait de degré impair, et aurait une racine réelle, ce qui donnerait une valeur propre réelle : impossible !

3. Soit $y \in \text{Vect}(x, f(x))$, $y = ax + bf(x)$. On a :

$$f(y) = af(x) - bx \in \text{Vect}(x, f(x)).$$

4. Procédons de proche en proche. Soit e_1 un vecteur non-nul de E. $f(e_1)$ n'est pas lié à e_1, puisque f est sans valeur propre. On choisit ensuite $e_2 \notin \text{Vect}(e_1, f(e_1))$. Il faut prouver que $f(e_2) \notin \text{Vect}(e_1, f(e_1), e_2)$. Mais si tel était le cas, on aurait

$$f(e_2) = ae_1 + bf(e_1) + ce_2 \implies -e_2 = af(e_1) - be_1 + cf(e_2),$$

et en remplaçant $f(e_2)$ par $ae_1 + bf(e_1) + ce_2$, on trouverait que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ est liée. On continue ainsi pour construire e_3, etc... La matrice résultante est diagonale par blocs, les n blocs sont ceux apparus à la question 1.

Exercice 28.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Démontrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $QAQ^{-1} = B$.

Correction.

On écrit la relation sous la forme $PA = BP$ et on pose $S = \Re e(P)$ et $T = \Im m(P)$ de sorte que $P = S + iT$. On a donc $SA + iTA = BS + iBT$ soit encore $SA = BS$ et $TA = BT$. Le problème est que rien ne dit que S ou T soit inversible. Maintenant, on a encore pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(S + xT)A = B(S + xT).$$

Or, $R(x) = \det(S + xT)$ est un polynôme qui n'est pas identiquement nul car $R(i) \neq 0$. Il admet donc un nombre fini de racines et on peut trouver $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S + x_0T$ est inversible. On a le résultat voulu en posant $Q = S + x_0T$.

Exercice 29.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Correction.

On va raisonner par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial. Admettons que le résultat soit vrai au rang n et prouvons-le au rang $n+1$. Soit f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la famille $(x, f(x))$ est liée, alors on sait que (attention, ce n'est pas trivial!) que f est une homothétie, $f = \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$. Dans ce cas, λ doit être nul et la propriété est évidente! Sinon, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre. Complétons alors la famille en $(x, f(x), e_3, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de f a la forme suivante :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & A' \end{array}\right)$$

où A' est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Par hypothèse de récurrence, $A' = QB'Q^{-1}$ où B' a la forme voulue. Posons

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

qui est inversible. De plus on a

$$QBQ^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & B' \end{array}\right).$$

Autrement dit A est semblable à B qui est elle-même semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. A est semblable à cette dernière matrice et l'hypothèse de récurrence est prouvée.