Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°13

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w).
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k.
6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A est-elle diagonalisable ? Montrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1. Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.

Exercice 5.

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

Exercice 6.

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient F, G deux sous-espaces de E supplémentaires stables par u. On note π_u le polynôme minimal de u, π_F le polynôme minimal de $u_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $u_{|G}$. Démontrer que

$$\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_F, \pi_G).$$

Exercice 8.

Soit $n \geq 2$ et A la matrice définie par $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = 1$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, les autres coefficients étant tous nuls.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 9.

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

3. Diagonaliser U.

Exercice 10.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Démontrer que $\det(A+N) = \det(A)$.

Exercice 11.

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme minimal est X^2+1 ?

Exercice 12.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et soit π_u son polynôme minimal. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et π_u sont premiers entre eux.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(g) = f \circ g$.

1. Démontrer que toute valeur propre de f est une valeur propre de ϕ puis, si λ est une valeur propre de f, déterminer $E_\lambda(\phi)$.
2. En déduire que si f est diagonalisable, alors ϕ est diagonalisable.

Exercice 14.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux éléments de E premiers entre eux tels qu'en outre B est scindé à racines simples. On notera $x_1, \dots, x_p$ ses racines. On note ϕ l'application de E dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E. Est-ce un isomorphisme ?
2. Démontrer que 0 est une valeur propre de ϕ et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Démontrer que, pour chaque $k = 1, \dots, p$, $P_k(X) = \prod_{j \neq k}(X - x_j)$ est un vecteur propre de ϕ.
4. En déduire que ϕ est diagonalisable.

Exercice 15.

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $p \geq 1$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^p est diagonalisable et $\ker(M) = \ker(M^p)$. Le résultat subsiste-t-il si on travaille dans $\mathbb{R}$?

Exercice 16.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les valeurs propres de f sont simples.
2. Il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de E.
3. La famille $\{Id, f, \dots, f^{n-1}\}$ est libre.

Exercice 17.

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ soit diagonalisable.