Feuille d'exercices n°13

Exercice 1.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0
4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0
6. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 2.

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
4. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
4. $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 4.

Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$
2. $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n} - 1}$.
3. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 5.

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n^2}$ **2**. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

3. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$

Exercice 6.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$ est convergente.

Exercice 7.

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 8.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 9.

Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Exercice 10.

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Exercice 11.

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 12.

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\textbf{1.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} \qquad \textbf{2.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} \qquad \textbf{3.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

Exercice 13.

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.
2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Exercice 14.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieure à 1.
2. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n > 0$, et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.
4. Si $(-1)^n n u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.
5. Si $(-1)^n n^2 u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 15.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Exercice 16.

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$. Comparer u_n et v_n. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.
2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.
4. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 17.

Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq A.$$
Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$
On suppose en outre que $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Application 1 : retrouver la règle de d'Alembert.
4. Application 2 : étudier la convergence de $\sum_n u_n$ pour
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

Exercice 18.

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Exercice 19.

Discuter, suivant la valeur des paramètres, la convergence des séries suivantes :

1. $e^{\frac{1}{n}} - a - \dfrac{b}{n}$, $a, b \in \mathbb{R}$ **2.** $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$, $a \in \mathbb{R}$

Exercice 20.

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Exercice 21.

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$ **2**. $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$

3. $u_1 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = e^{-u_n}/n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 22.

Discuter la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n},$$

où a et b sont deux nombres complexes, $a \neq 0$.

Exercice 23.

On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n). On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_n u_n v_n$. Pour $n \geq 1$, on note $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

2. Montrer que si la suite (s_n) est bornée, et si la suite (v_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle, alors $\sum_n u_n v_n$ est convergente.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.

3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 25.

Déterminer $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 26.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.
2. Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Exercice 27.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$
2. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$
3. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
   Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
4. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 28.

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24} u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Exercice 29.

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 30.

Soit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_n \sim_{+\infty} \frac{e^\lambda}{n}$.