Corrigé de la feuille d'exercices n°13

Exercice 1.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 **2.** $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0 **4.** $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 **6.** $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Correction.

1. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4) \\ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4) \end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \\ \cos(2x) &= 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5). \end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par x, et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit

$$\sin(x)\cos(2x) = x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o(x^6).$$

4. On écrit les développements limités

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

et on effectue le produit pour trouver

$$(\cos x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

5. C'est la même méthode, encore plus facile car $1+x^3 = 1+x^3+o(x^3)$. Puisque d'autre part

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

on trouve en effectuant le produit

$$(1+x^3)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o(x^3).$$

6. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

on trouve

$$\big(\ln(1+x)\big)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4).$$

Exercice 2.

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0

3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Correction.

1. On pose $u = x + x^2$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, et on utilise

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4).$$

On calcule les puissances de u, mais bien sûr on les tronque à l'ordre 4. On trouve :

$$\begin{array}{rcl} u & = & x+x^2 \\ u^2 & = & x^2+2x^3+x^4 \\ u^3 & = & x^3+3x^4+o(x^4) \\ u^4 & = & x^4+o(x^4) \end{array}$$

Ainsi, en remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2}=1-x+x^3-x^4+o(x^4).$$

2. On commence par calculer le DL (à l'ordre 4 simplement !) de $g(x)=\frac{1}{\cos x}$. Pour cela, on remarque que
$$g(x)=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=\frac{1}{1-u}$$
avec
$$\begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}+o(x^4) \\ u^2 & = & \dfrac{x^4}{4}+o(x^4) \end{array}$$
On déduit du DL de $\frac{1}{1-u}$ que
$$g(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4).$$
On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$
et on trouve
$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

3. A l'ordre 2, on a
$$\cos(x)+1=2-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$
d'où
$$\frac{1}{\cos x+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$
On multiplie ce DL par celui de $\sin x-1$
$$\sin x-1=-1+x+o(x^2).$$
On trouve finalement
$$\frac{\sin x-1}{2+\cos x}=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

4. Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en x vont se simplifier. On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

puis le produit et on trouve finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Exercice 3.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0

3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0 **4.** $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Correction.

1. On commence par écrire
$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$
On peut donc écrire
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln(1+u)\text{ avec }u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$
En particulier, on remarque que $o(u^2)=o(x^4)$. De plus, on sait que
$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$
On calcule les puissances de u, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,
$$u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$
$$u^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4).$$
Il vient
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)&=\frac{-x^2}{6}+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{2\times 36}\right)x^4+o(x^4)\\&=\frac{-x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4).\end{aligned}$$

2. On pose $u=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$. u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut bien écrire que
$$\exp(u)=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+o(u^4).$$
Mais,
$$\begin{array}{rcl} u &=& x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\\ u^2 &=& x^2-\dfrac{x^4}{3}+o(x^4)\\ u^3 &=& x^3+o(x^4)\\ u^4 &=& x^4+o(x^4). \end{array}$$
En remplaçant, on trouve
$$\exp(\sin(x))=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$
3. On écrit
$$(\cos x)^{\sin x}=\exp\big(\sin x\ln(\cos x)\big).$$
On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit ! Soit d'abord $u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$. On a
$$\ln(\cos x)=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}+o(u^5).$$
D'autre part,
$$\begin{array}{rcl} u &=& -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5)\\ u^2 &=& \dfrac{x^4}{4}+o(x^5)\\ u^3 &=& o(x^5)\\ u^4 &=& o(x^5)\\ u^5 &=& o(x^5) \end{array}$$
Il vient
$$\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5).$$
On en déduit
$$\begin{array}{rcl} \sin(x)\ln(\cos x) &=& \left(x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+o(x^5)\right)\\ &=& -\dfrac{x^3}{2}+o(x^5) \end{array}$$
Finalement, on pose $v=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$, et on voit que $v^2=o(x^5)$. On obtient donc
$$\exp\big(\sin x\ln(\cos x)\big)=\exp(v)=1+v+O(v^2)=1-\frac{x^3}{2}+o(x^5).$$
Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre !

4. On commence par étudier le DL de $\frac{1}{x}\ln(\cosh x)$. Au voisinage de 0, le DL à l'ordre 4 du cosinus hyperbolique est donné par

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Celui de $\ln(1+u)$ est donné par

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Il est n'est pas nécessaire d'aller plus loin, car en posant $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a déjà $o(u^2) = o(x^4)$. Puisque $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, on a en introduisant dans le DL de $\ln(1+u)$:

$$\frac{1}{x}\ln(\cosh x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

(on se contente de DLs à l'ordre 3 car on va les multiplier par x à la fin). Pour trouver le DL de $(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$, on doit encore composer par l'exponentielle :

$$\exp(v) = v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$$

avec

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\ v^2 &= \frac{x^2}{4} + o(x^3) \\ v^3 &= \frac{x^3}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

On trouve donc

$$(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Pour la fonction initiale, ceci donne

$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

Exercice 4.

Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$ **2.** $u_n = \sqrt{\mathrm{ch}\frac{1}{n} - 1}$.

3. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Correction.

1. En utilisant le développement limité du cosinus, ou l'équivalent $1-\cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$, on voit que :
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{2n^2},$$
et la série est convergente.
2. Le terme général u_n est positif, et de $\operatorname{ch}(1/n) = 1 + 1/2n^2 + o(1/n^2)$, on déduit que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}n}$. Par conséquent, la série est divergente.
3. On a :
$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(-n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-n + \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &\sim_{+\infty} e^{1/2}e^{-n}. \end{aligned}$$
Par comparaison à une série géométrique positive et convergente, la série de terme général u_n converge.

Exercice 5.

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n^2}$ **2.** $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

3. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$

Correction.

1. On a :
$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$
et la série converge absolument.
2. La série est alternée, et le module du terme général décroît vers 0 à partir d'un certain rang : la série converge par application du critère des séries alternées.
3. Il s'agit d'une série alternée bien cachée. En effet, n^2 a la parité de n, et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Le terme général vaut donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$. La série converge par application immédiate du critère spécial des séries alternées.

Exercice 6.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$ est convergente.

Correction.

On va montrer que cette série est absolument convergente. Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée par M, et on a :

$$|u_n| \leq \frac{M}{n}\int_0^1 t^n dt \leq \frac{M}{n(n+1)}.$$

La série de terme général (u_n) est absolument convergente.

Exercice 7.

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Correction.

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées. La série est alternée, et la valeur absolue du terme général décroît vers zéro.
2. On écrit que

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

3. Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = -\frac{1}{n}$ et $t_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Notons U_n, V_n, W_n et T_n leurs sommes partielles respectives. Alors (V_n) est convergente, (W_n) est divergente, et (T_n) est convergente. En effet, $|t_n| \sim_{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et la série $\sum_n t_n$ est absolument convergente. Donc (U_n) est somme de deux suites convergentes et d'une suite divergente. Elle est donc divergente. Autrement dit, la série de terme général u_n est divergente.
4. Bien que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, l'une des deux séries converge et l'autre diverge. Dans le théorème de comparaison de deux séries, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse que les termes généraux gardent le même signe. Une autre conclusion est que $u_n = (-1)^n a_n$,

avec $a_n \geq 0$, (a_n) tend vers 0, et pourtant $\sum_n u_n$ diverge. Dans le critère des séries alternées, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse (a_n) décroit.

Exercice 8.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Correction.

Dans tous les cas, on va comparer à une intégrale.

1. On doit séparer les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k \geq 2$, on a donc
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$
l'inégalité de gauche étant encore valable pour $k = 1$. On somme l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n, et celle de droite pour k allant de 2 à n. En rajoutant 1 à l'inégalité de droite, on trouve finalement :
$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$
En intégrant, il vient
$$\frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1.$$
On en déduit que
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq 1 + \frac{C}{n^{\alpha-1}}$$
où $C \in \mathbb{R}$. Puisque $\alpha < 1$, $n^{1-\alpha} \to +\infty$ et on en déduit que
$$S_n \sim_{+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
Si $\alpha \leq 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est cette fois croissante. Le raisonnement est strictement identique, mais on doit inverser le sens des inégalités. On obtient exactement le même résultat.
2. Le raisonnement est toujours identique, mais cette fois on doit intégrer la fonction $\frac{1}{x}$ dont une primitive est $\ln x$. On en déduit que
$$S_n \sim_{+\infty} \ln n.$$

Exercice 9.

Soit $\alpha > 1$. On note
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Correction.

1. On intègre :
$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right).$$
On fait tendre x vers $+\infty$ et on trouve que
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}.$$
2. On va comparer la somme à une intégrale. La fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ étant décroissante, on en déduit que, pour tout $k \geq 2$, on a
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$
On somme ces inégalités pour k allant de $n+1$ à N. On trouve :
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$
On fait tendre N vers $+\infty$. En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve que
$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
On en déduit que
$$\frac{R_n}{\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}} \to 1$$
c'est-à-dire
$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 10.

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Correction.

On se ramène à une somme en remarquant que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

Puisque la fonction ln est croissante, on a pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt.$$

On somme cette inégalité pour k allant de 2 à n et, remarquant que $\ln(1) = 0$, on trouve

$$\int_{1}^{n} \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(t)dt.$$

Une primitive de $\ln(x)$ étant donnée par $x\ln x - x$, on trouve que

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2.$$

On divise par $n\ln n$ pour prouver que $\ln(n!) \sim_{+\infty} n\ln n$. La seule chose non évidente à vérifier est que

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} \to 1.$$

Pour cela, on écrit

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = \frac{n\ln(n+1) + \ln(n+1)}{n\ln n} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\ln n}.$$

Exercice 11.

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Correction.

On a affaire à une série télescopique un peu compliquée. Les simplifications se font sur l'écriture de 3 termes consécutifs. Précisément, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

On prouve donc que la série converge, et que sa somme fait : $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 12.

Sachant que $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\textbf{1.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} \qquad \textbf{2.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} \qquad \textbf{3.}\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

Correction.

1. La première somme ne pose pas de problèmes :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} + e = 2e.$$

2. La deuxième somme est plus compliquée à cause du terme en n^2. Pour qu'il se simplifie bien avec le $n!$, le plus commode est de l'écrire
$$n^2 = n(n-1) + n$$
de sorte que
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e + e - 2e = 0.$$

3. La méthode est similaire. Dit de façon algébrique, on va décomposer le polynôme X^3 dans la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$. En raisonnant d'abord avec le terme de plus haut degré, puis celui juste après, etc..., on trouve :
$$X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X.$$
On en déduit :
$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\sum_{n\geq 1} n(n-1)n! + \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n\geq 2} \frac{3}{(n-2)!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 5e.\end{aligned}$$

Exercice 13.

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.

2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Correction.

1. On écrit $\sum_{n=1}^N y_n = x_{N+1} - x_1$ (la somme est télescopique). Ainsi, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=1}^N y_n)$ converge si et seulement si la suite (x_N) converge.
2. Un petit calcul prouve que :

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

On effectue un développement limité de v_n -il faut pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 - et on a :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n est donc convergente.
3. On écrit $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Puisque la série $\sum_n v_n$ converge, d'après la première question la suite $\big(\ln(u_n)\big)$ converge vers un réel l, et en passant à l'exponentielle, on trouve que la suite (u_n) converge vers un réel C strictement positif. Revenant à la définition de (u_n), ceci donne le résultat.

Exercice 14.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieure à 1.
2. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n > 0$, et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.
4. Si $(-1)^n n u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.
5. Si $(-1)^n n^2 u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Correction.

1. Faux ! Prendre $u_n = 1/n^2$.
2. Faux ! Prendre $u_{2n} = 1/n^2$ et $u_{2n+1} = 2/n^2$. On a toujours $u_{2n+1} > u_{2n}$, et pourtant la série converge.
3. Vrai ! Pour $n > n_0$, on a $0 \leq u_n \leq 1$ et donc $0 \leq u_n^2 \leq u_n \leq 1$. On a convergence par

majoration (le terme général est positif).

4. Faux ! Prendre $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln n}$.
5. Vrai ! On a convergence absolue, car à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq 2/n^2$.

Exercice 15.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Correction.

1. Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, la suite (u_n) converge vers zéro. Il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que, pour $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha > 1$, on a alors, pour $n \geq N$, $0 \leq u_n^\alpha \leq u_n$. Puisque l'on travaille avec des séries à termes positifs, ceci entraine la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n^\alpha$.
2. Deux cas sont possibles : <ul class="rien">
3. ou bien (u_n) ne converge pas vers 0. Dans ce cas, la suite (u_n^α) ne converge pas non plus vers 0, et donc la série $\sum_n u_n^\alpha$ diverge ;
4. ou bien (u_n) converge vers 0. Dans ce cas, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha \in]0,1[$, on en déduit que $0 \leq u_n \leq u_n^\alpha$. Ainsi, la série $\sum_n u_n^\alpha$ est aussi divergente.

Exercice 16.

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$. Comparer u_n et v_n. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.
2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.
4. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(n u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum u_n$ est divergente.

Correction.

1. Supposons d'abord $a > 1$, et prenons $b \in]1, a[$. Posons aussi $v_n = \frac{1}{n^b}$. Alors on a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^b}{(n+1)^b} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = 1 - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Ainsi, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Par récurrence, on montre aisément par récurrence sur n que, pour $n \geq n_0$,
$$u_n \leq C v_n$$
avec $C = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$. Par comparaison (les séries sont à terme positif), la série de terme général u_n converge puisque la série de terme général v_n converge.
2. Dans le cas où $a < 1$, on procède de même en choisissant cette fois $b \in]a, 1[$. On trouve alors que, pour n assez grand,
$$u_n \geq C v_n.$$
Puisque la série de terme général v_n diverge (cette fois, $b < 1$), la série de terme général u_n diverge.
3. Posons $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^b}$ dont on rappelle qu'elle converge si et seulement si $b > 1$. Alors,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^b = \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln(1+1/n)}\right)^b.$$
Or,
$$\frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+1/n)} = \frac{\ln n}{\ln n + O(1/n)} = \frac{1}{1 + O(1/n\ln n)} = O\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$
Effectuant le produit des deux développements limités, on trouve qu'au premier ordre,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Ainsi, on trouve le même résultat, alors que la série de terme général u_n est parfois convergente, parfois divergente. Le cas $a = 1$ est bien un cas limite.
4. (a) On a
$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

   (b) La question précédente prouve que la série de terme général w_n converge. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} w_k \to C$. Mais $\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln(nu_n) - \ln(u_1)$. On en déduit que la suite $(\ln(nu_n))$ converge vers un réel. Passant à l'exponentielle, on en déduit qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $nu_n \to \lambda$ c'est-à-dire $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$. Ainsi, par comparaison, la série de terme général u_n diverge.

Exercice 17.

Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq A.$$
Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a
$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$
On suppose en outre que $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Application 1 : retrouver la règle de d'Alembert.
4. Application 2 : étudier la convergence de $\sum_n u_n$ pour
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

Correction.

1. L'idée est de se ramener à une somme télescopique. En effet, on a, pour tout $n \geq p$,
$$Au_{n+1} \leq a_n u_n - a_{n+1}u_{n+1}.$$
Soit $N \geq p$, on somme les inégalités précédentes pour n allant de p à $N-1$. On obtient
$$A \sum_{n=p}^{N-1} u_{n+1} \leq a_p u_p - a_N u_N \leq a_p u_p.$$
Notant $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ la somme partielle de la série, on obtient
$$S_N \leq \frac{a_p u_p}{A} + S_p.$$
Autrement dit, la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ est majorée. Comme on a affaire à une série à termes positifs, ceci assure la convergence de la série.
2. L'hypothèse s'écrit encore $a_{n+1}u_{n+1} \geq a_n u_n$ pour tout $n \geq p$. On en déduit que $a_n u_n \geq a_p u_p$, et donc que
$$u_n \geq a_p u_p \times \frac{1}{a_n}.$$
Or la série $\sum_n \frac{1}{a_n}$ est divergente et à termes positifs. On a donc par comparaison divergence de la série $\sum_n u_n$.
3. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l > 1$. Posons $a_n = 1$. Alors $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \to \frac{1}{l} - 1 < 0$, et donc pour n assez grand, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \leq 0$. Puisque la série $\sum_n 1$ diverge, il en est de même de $\sum_n u_n$. Au contraire, supposons maintenant que $l < 1$. On prend la même suite (a_n), et on observe que $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \to \frac{1}{l} - 1 > 0$, et donc pour n assez grand, on a
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \geq \frac{\frac{1}{l} - 1}{2} > 0.$$

Par le premier point, $\sum_n u_n$ converge.

4. Pour les deux séries, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure car on est dans son cas litigieux où le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1. On va conclure par la règle de Kummer en utilisant à chaque fois $a_n = n$. Pour la première série, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = -\frac{n+1}{2n+1} \leq 0.$$

Puisque la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même de $\sum_n u_n$. Pour la deuxième série, on a cette fois

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi, par la règle de Kummer, la série est convergente.

Exercice 18.

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Correction.

Puisque les termes généraux des deux séries sont positifs, il suffit de démontrer que les sommes partielles d'une des séries sont majorées si et seulement si les sommes partielles de l'autre le sont. Le point clé est l'encadrement suivant :

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^{k+1}-1} \leq u_{2^k} + \cdots + u_{2^{k+1}-1} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^k} \leq 2^k u_{2^k}.$$

Ainsi, supposons que $\sum_k 2^k u_{2^k}$ est convergente, et soit M tel que, pour tout K, on a $\sum_{k=0}^{K} 2^k u_{2^k} \leq M$. Alors, considérons N un entier et fixons K tel que $N \leq 2^{K+1} - 1$. On a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{2^{K+1}-1} u_n \leq \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq \sum_{k=0}^{K} 2^k u_{2^k} \leq M.$$

On en conclut que $\sum_n u_n$ est convergente. Réciproquement, supposons que $\sum_n u_n$ est convergente, et soit M tel que, pour tout N, on a $\sum_{n=1}^{N} u_n \leq M$. Alors, pour tout entier K, on a

$$\sum_{k=0}^{K} 2^k u_{2^k} = u_1 + \sum_{k=0}^{K-1} 2^{k+1} u_{2^{k+1}} \leq u_1 + 2 \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq u_1 + 2 \sum_{n=1}^{2^K} u_n \leq u_1 + 2M.$$

Ainsi, la série $\sum_n 2^n u_{2^n}$ est convergente.

Exercice 19.

Discuter, suivant la valeur des paramètres, la convergence des séries suivantes :

1. $e^{\frac{1}{n}} - a - \dfrac{b}{n},\ a, b \in \mathbb{R}$ **2.** $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3},\ a \in \mathbb{R}$

Correction.

1. On réalise un développement limité du terme général :
$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Si $a \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \to (1-a) \neq 0$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \sim_{+\infty} \frac{1-b}{n}$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.
2. On effectue un développement du terme général u_n :
$$\begin{aligned} u_n &= n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2} \\ &= n\left(1+\frac{a}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - n\left(1+\frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$
Si $a \neq 9/2$, $u_n \sim \frac{1}{n}\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)$ et la série diverge. Si $a = 9/2$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, et la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 20.

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Correction.

1. Cette série est bien adaptée à l'utilisation de la règle de d'Alembert. On calcule donc
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{a^n n!} \\ &= a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= a\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= a\exp\left(-n \times \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right). \end{aligned}$$
On obtient donc que u_{n+1}/u_n converge vers a/e. Par application de la règle de d'Alembert, si $a > e$, la série est divergente. Si $a < e$, la série est convergente. Le cas $a = e$ est un cas limite où le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure directement.

2. On pousse un peu plus loin le développement précédent. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= e\exp\left(-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= e\exp\left(-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

En particulier, pour n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$, et donc la suite (u_n) est croissante. Elle ne converge donc pas vers zéro, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 21.

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$ **2.** $u_n=\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$

3. $u_1\in\mathbb{R},\ \ u_{n+1}=e^{-u_n}/n^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

Correction.

1. Il faut savoir que la suite des sommes partielles de la série harmonique est équivalente à $\ln n$. On utilise ici seulement la minoration, qui se démontre très facilement par comparaison à une intégrale :
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1).$$
On peut obtenir une estimation précise du dénominateur également en faisant une comparaison à une intégrale. Le plus facile est toutefois d'utiliser la majoration brutale suivante :
$$\ln(n!)=\ln(1)+\cdots+\ln(n)\leq n\ln n.$$
Il en résulte que $u_n\geq\frac{1}{n}$, et la série $\sum u_n$ est divergente.
2. On majore sous l'intégrale. En utilisant $\sin x\leq x$, on obtient (on suppose $n\geq 2$) :
$$0\leq u_n\leq\int_0^{\pi/n}\frac{x^3}{1+x}dx\leq\int_0^{\pi/n}x^3dx\leq\frac{\pi^4}{4n^4}.$$
La série $\sum u_n$ est convergente.
3. Remarquons d'abord que $u_n>0$ pour tout entier n. Supposons d'abord $\alpha>0$. Alors, puisque $e^{-u_n}\leq 1$, la suite (u_n) converge vers 0, et donc $e^{-u_n}\to 1$. Il vient $u_n\sim_{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, et donc la série converge si et seulement si $\alpha>1$. Supposons maintenant $\alpha\leq 0$. Alors la suite (u_n) ne peut pas tendre vers 0. Si c'était le cas, on aurait $u_{n+1}=e^{-u_n}/n^\alpha\geq e^{-u_n}\geq e^{-1/2}$ dès que n est assez grand, contredisant la convergence de (u_n) vers 0. Ainsi, la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

Exercice 22.

Discuter la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n},$$

où a et b sont deux nombres complexes, $a \neq 0$.

Correction.

Pour $|b| \leq 1$, la suite (b^n), qui est bornée, est négligeable devant $2^{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $(2^{\sqrt{n}} + b^n) \sim_{+\infty} 2^{\sqrt{n}}$, et $u_n \sim a^n$. On en déduit alors que, pour $|a| \geq 1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 : la série $\sum_n u_n$ est donc divergente ; Pour $|a| < 1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente car $|u_n| \sim_n |a^n|$, le terme de droite étant le terme général d'une série convergente. Si maintenant $|b| > 1$, alors la suite $(2^{\sqrt{n}})$ est négligeable devant (b^n) (faire le quotient en passant par la notation exponentielle). On en déduit que $u_n \sim_{+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}} a^n}{b^n}$. Posons $v_n = \frac{2^{\sqrt{n}} |a|^n}{|b|^n}$, et étudions la suite (v_n) en appliquant le critère de d'Alembert. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|} 2^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Puisque $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 (multiplier par la quantité conjuguée), on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|}$. Si $|a| < |b|$, alors la série $\sum_n v_n$ converge, et la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Si $|a| \geq |b|$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 23.

On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n). On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_n u_n v_n$. Pour $n \geq 1$, on note $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

2. Montrer que si la suite (s_n) est bornée, et si la suite (v_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle, alors $\sum_n u_n v_n$ est convergente.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. On écrit successivement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} u_k v_k &= \sum_{k=p}^{q}(s_k - s_{k-1})v_k\\ &= \sum_{k=p}^{q} s_k v_k - \sum_{k=p}^{q} s_{k-1}v_k\\ &= \sum_{k=p}^{q} s_k v_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} s_k v_{k+1}\\ &= \sum_{k=p}^{q-1} s_k(v_k - v_{k+1}) + s_q v_q - s_{p-1}v_{p-1}.\end{aligned}$$

2. On va appliquer le critère de Cauchy pour démontrer la convergence de la série. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et soit N un entier tel que, pour $n \geq N$, on a $|v_n| \leq \varepsilon$. Soient $p, q \geq N$. Fixons aussi $M > 0$ tel que $|s_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après l'écriture que nous avons obtenue à la première question et l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\right| \leq M\varepsilon + M\varepsilon + \sum_{k=p}^{q-1} |s_k(v_k - v_{k+1})|.$$

Puisque $|s_k| \leq M$ et que $v_k - v_{k+1} \geq 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\right| &\leq M\varepsilon + M\varepsilon + M\sum_{k=p}^{q-1}(v_k - v_{k+1})\\ &\leq M\varepsilon + M\varepsilon + M(v_p - v_q)\\ &\leq 3M\varepsilon.\end{aligned}$$

D'après le critère de Cauchy, la série est convergente.

3. En utilisant la question précédente, il suffit de prouver que la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

est bornée. Pour cela, on écrit $\sin(k\theta) = \Im m(e^{ik\theta})$ et on utilise la somme d'une série trigonométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \Im m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right).$$

Mais on a, pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}}{e^{i\theta/2}} \times \frac{e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{+i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}\\ &= e^{in\theta/2}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Revenant à S_n, on trouve, pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Ceci est bien bornée indépendamment de n par $\frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors bien sûr $S_n = 0$.

Exercice 24.

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Correction.

1. On fixe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} = 0$$

et ceci quelque soit la valeur de β. Autrement dit, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.

2. On va comparer cette fois à la série de terme général $\frac{1}{n}$. On a en effet

$$\lim_{n\to\infty} n \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty.$$

Ainsi, pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n.$$

Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général u_n diverge.

3. (a) Si $\beta \leq 0$, alors on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n$$

et on conclut comme précédemment que la série est divergente.

(b) Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}\right).$$

Si $\beta > 1$, ceci tend vers $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$ et on a même que pour tout entier n, on a

$$T_n \leq \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}.$$

Si $\beta < 1$, on remarque immédiatement que (T_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $\beta = 1$, on sait que

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

et ceci tend aussi vers $+\infty$.

(c) Il reste à traiter le cas $\beta > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. On a alors pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On en conclut que, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série est majorée (par $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$) et donc comme on a une série à termes positifs, la série est convergente. Si $\beta \leq 1$, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que la suite des sommes partielles est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Elle tend donc elle-même vers $+\infty$. La série est divergente.

Exercice 25.

Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Correction.

Posons, pour $a > 0$, $S(a) = \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$. Cette quantité est bien définie car on a affaire à une série à terme positif dont le terme général est équivalent à $\frac{a}{n^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit, par comparaison à une intégrale, que

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{a^2+x^2} \leq \sum_{n=0}^N \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^N \frac{a}{a^2+x^2}dx.$$

On calcule ces intégrales et on trouve

$$\arctan\left(\frac{N+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \arctan\left(\frac{N}{a}\right).$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 26.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.
2. Sachant que $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Correction.

1. Remarquons d'abord par récurrence sur n que la dérivée n-ième de $f(t) = \ln(1+t)$ est :
$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$
On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à cette fonction entre 0 et 1. Remarquons que si $t \in [0,1]$, on a :
$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leq (n-1)!$$
On a donc :
$$\left|f(1) - f(0) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{1}{n},$$
ce qui en remplaçant les dérivées successives en zéro donne :
$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{n}.$$
Faire tendre n vers $+\infty$ donne le résultat.
2. Avec l'indication, il vient :
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt.$$

Or, $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$, et

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt\right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Il vient $|U_n - \ln 2| \leq \dfrac{1}{n+1}$, ce qui redonne bien le résultat de la première question.

Exercice 27.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$
2. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)}.$$
3. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$
Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2 + bt) A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$
4. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.

Correction.

1. Une intégration par parties donne
$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{2n+1} f(\pi) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt.$$
Or,
$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt\right| \leq \int_0^\pi |f'(t)|dt,$$
et donc on a
$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt \to 0.$$
2. C'est un calcul classique. On écrit $\cos(kt) = \Re e(e^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série

géométrique de raison différente de 1 (puisque $t \in]0,\pi]$). On obtient

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re e\left(\frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right) = \frac{1}{2} + 2\Re e\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2)\cos((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Une petite formule de trigo donne

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(t/2)} \times \big(\sin((2n+1)t/2) + \sin(-t/2)\big)$$

ce qui finalement donne le résultat.

3. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}dt \\ &= 0 - \left[(2at+b)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a\frac{\cos(nt)}{n^2}dt \\ &= \frac{(2a\pi+b)(-1)^n - b}{n^2}. \end{aligned}$$

Ceci vaudra $1/n^2$ pour $b=-1$ et $a=1/2\pi$. On déduit alors

$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

4. On a donc prouvé que

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi f(t)A_n(t)dt,$$

avec $f(t) = \frac{at^2+bt}{2\sin(t/2)}$. Pour conclure, il s'agit de prouver que f est de classe C^1 en 0. Clairement, f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$. Pour prouver que f est dérivable en 0 et que sa dérivée y est continue, on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée. On remarque ainsi que, pour $t \in]0,\pi]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2(2at+b)\sin(t/2) - (at^2+bt)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} \\ &= \frac{2(2at+b)(t/2+o(t^2)) - (at^2+bt)(1-t^2/2+o(t^2))}{t^2+o(t^2)} \\ &= \frac{at^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} \to a. \end{aligned}$$

Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^1 en 0. On peut alors appliquer le résultat des questions précédentes.

Exercice 28.

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24} u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Correction.

1. Il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{5^n}$$
et que le membre à droite de cette inégalité et le terme général d'une série convergente. On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert (ce qui est légitime puisqu'on a affaire à une série à termes positifs). Observant que
$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{25} \times \frac{2k-1}{2k+1} \to \frac{1}{25}$$
on en déduit que la série de terme général u_n est convergente.
2. L'équation précédente montre qu'en réalité
$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{25}.$$
Par récurrence, on obtient que
$$u_{n+k+1} \leq 25^k u_{n+1}.$$
Ainsi,
$$R_n \leq u_{n+1} \times \sum_{k=0}^{+\infty} 25^{-k} = \frac{25}{24} u_{n+1}.$$
3. Dès $n = 2$, on a $R_n < 0,001$. Une valeur approchée à 10^{-3} près est donc donnée par $u_1 + u_2 \simeq 0,202$.

Exercice 29.

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k \geq n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction.

1. Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, on a, pour tout $k \geq 2$,
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}. \qquad (1)$$
Sommant cette relation pour k allant de 2 à n, puis ajoutant 1, on obtient :
$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}.$$
Calculant l'intégrale, on trouve :
$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$
On en déduit que $H_n / \ln n \to 1$, et donc $H_n \sim \ln n$.
2. Nous avons
$$\begin{aligned} v_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$
ce qui démontre que $v_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2(n+1)^2}$. On en déduit que la série $\sum_n v_n$ est convergente. De plus, revenant à la définition $v_n = u_{n+1} - u_n$, on voit que les sommes partielles se télescopent et que
$$\sum_{k=1}^{n} v_k = u_n - u_1.$$
3. On reprend la même méthode que pour prouver la divergence de la série harmonique, à savoir que l'on compare à une intégrale. En effet, pour tout k, on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$
Sommant cette inégalité pour k allant de n à $+\infty$, on trouve
$$\frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{t}{2t^2} = \frac{1}{(n-1)^2}.$$
On trouve finalement $R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.
4. Soit donc w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$. On sait que $(w_n) \to 0$. D'autre part, on a :
$$t_n = w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
d'après la question 2., soit $t_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. On applique le critère de comparaison des séries à termes positifs : la série de terme général t_n est convergente, et on a
$$\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) \sim_{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-1}{2k^2}.$$

Or, puisque (w_n) tend vers 0, on a

$$\sum_{k=n}^{N}\left(w_{k+1}-w_k\right)=w_{N+1}-w_n\to -w_n \text{ pour } N\to+\infty.$$

Ainsi, utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$-w_n\sim_{+\infty}-\frac{1}{2n},\ \text{ce qui s'écrit aussi } w_n=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ceci est bien le résultat demandé.

Exercice 30.

Soit $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Démontrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P_n\sim_{+\infty}\frac{e^\lambda}{n}$.

Correction.

On a

$$\ln(P_n)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right).$$

Or,

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

On somme ceci pour k allant de 1 jusque n. Utilisant la convergence des séries de droite (par le critère des séries alternées) et de gauche (par convergence absolue), et l'estimation classique des sommes partielles de la série harmonique, on en déduit qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ de sorte que

$$\ln(P_n)=-\frac{1}{2}\ln n+C+o(1).$$

Prenant l'exponentielle, il vient

$$P_n=\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\exp\left(o(1)\right)$$

ce qui prouve le résultat.