Feuille d'exercices n°14

1. Exercices basiques

a. Comparaison série-intégrale

Exercice 1.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 2.

Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Exercice 3.

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

b. Dénombrabilité

Exercice 4.

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. $\{2^n;\ n \geq 0\}$;
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$;
4. l'ensemble des nombres premiers ;
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : par tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer que pour tout entier p, on a $f_p \neq f$. En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

c. Familles sommables

Exercice 6.

Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Exercice 7.

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

Exercice 8.

On pose, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9.

Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n, p) \in I$, on pose $u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)} a_p$ si $p \leq n$, $u_{n,p} = 0$ sinon. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 10.

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 11.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 12.

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

2. Exercices d'entraînement

a. Comparaison série-intégrale

Exercice 13.

Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Exercice 14.

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

b. Dénombrabilité

Exercice 15.

On dit que deux ensembles E et F sont **équipotent** et on note $E \simeq F$ s'il existe une bijection de E dans F.

1. Montrer que $\simeq$ est réflexive, symétrique et transitive.
2. Montrer que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$, $[a,b] \simeq [c,d]$ (et aussi $]a,b[\simeq]c,d[$, $]a,b] \simeq]c,d]$ et $[a,b[\simeq [c,d[$
3. Montrer que $]0,1] \simeq]0,1[$ (indice : prendre l'identité sauf pour les nombres de la forme $\frac{1}{n}$

où $n \in \mathbb{N}^*$) puis que $]0,1[\simeq [0,1]$.

4. En déduire que $\mathbb{R} \simeq [0,1]$.

Exercice 16.

1. Déterminer la somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}}$.
2. Soit (u_n) une suite de $[0,1]$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un élément x_n dans $[0,1]\backslash \bigcup_{k=0}^{n} \left[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}\right]$.
3. Pourquoi peut-on extraire de la suite (x_n) une sous-suite convergente vers $\ell \in [0,1]$?
4. Démontrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable et en déduire que $\mathbb{R}$ également.

Exercice 17.

On dit qu'un réel x est dit nombre algébrique s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients entiers tel que x est racine de P i.e.

$$P(x) = 0.$$

Si x est algébrique, on dit que x est algébrique de degré d si le degré minimal d'un polynôme dont x est racine est égal à d.

1. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
2. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré d est au plus dénombrable.
3. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

c. Familles sommables

Exercice 18.

1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Exercice 19.

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$$
où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 20.

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. Soit $u,v\in\ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, la famille $(u_kv_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Pour $u,v\in\ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u\star v$ par $(u\star v)_n=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_kv_{n-k}$ où $n\in\mathbb{Z}$. Démontrer que $u\star v\in\ell^1(\mathbb{Z})$, puis calculer $N(u\star v)$ en fonction de $N(u)$ et de $N(v)$.
3. Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.
4. On définit $u\in\ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0=1$, $u_1=-1$ et $u_n=0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$.

Exercice 21.

Pour $n\geq 0$, on pose $w_n=2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

3. Exercices d'approfondissement

a. Comparaison série-intégrale

Exercice 22.

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln^2(k)$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 23.

Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 24.

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, démontrer que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 25.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n).$$
Démontrer que $\sum_n u_n$ est absolument convergente.
2. Démontrer que la série numérique $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ converge.
3. Application : étudier la nature de $\sum_n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.