Corrigé de la feuille d'exercices n°14

1. Exercices basiques

a. Comparaison série-intégrale

Exercice 1.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Correction.

Dans tous les cas, on va comparer à une intégrale.

1. On doit séparer les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k \geq 2$, on a donc
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$
l'inégalité de gauche étant encore valable pour $k = 1$. On somme l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n, et celle de droite pour k allant de 2 à n. En rajoutant 1 à l'inégalité de droite, on trouve finalement :
$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$
En intégrant, il vient
$$\frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1.$$
On en déduit que
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq 1 + \frac{C}{n^{\alpha-1}}$$
où $C \in \mathbb{R}$. Puisque $\alpha < 1$, $n^{1-\alpha} \to +\infty$ et on en déduit que
$$S_n \sim_{+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
Si $\alpha \leq 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est cette fois croissante. Le raisonnement est strictement identique, mais on doit inverser le sens des inégalités. On obtient exactement le même résultat.
2. Le raisonnement est toujours identique, mais cette fois on doit intégrer la fonction $\frac{1}{x}$ dont une primitive est $\ln x$. On en déduit que
$$S_n \sim_{+\infty} \ln n.$$

Exercice 2.

Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Correction.

1. On intègre :
$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right).$$
On fait tendre x vers $+\infty$ et on trouve que
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}.$$
2. On va comparer la somme à une intégrale. La fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ étant décroissante, on en déduit que, pour tout $k \geq 2$, on a
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$
On somme ces inégalités pour k allant de $n+1$ à N. On trouve :
$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$
On fait tendre N vers $+\infty$. En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve que
$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
On en déduit que
$$\frac{R_n}{\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}} \to 1$$
c'est-à-dire
$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 3.

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Correction.

On se ramène à une somme en remarquant que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

Puisque la fonction ln est croissante, on a pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt.$$

On somme cette inégalité pour k allant de 2 à n et, remarquant que $\ln(1) = 0$, on trouve

$$\int_{1}^{n} \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(t)dt.$$

Une primitive de $\ln(x)$ étant donnée par $x \ln x - x$, on trouve que

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2.$$

On divise par $n \ln n$ pour prouver que $\ln(n!) \sim_{+\infty} n \ln n$. La seule chose non évidente à vérifier est que

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} \to 1.$$

Pour cela, on écrit

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{n\ln(n+1) + \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n \ln n}.$$

b. Dénombrabilité

Exercice 4.

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. $\{2^n;\ n \geq 0\}$;
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$;
4. l'ensemble des nombres premiers ;
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Oui, car c'est une partie de $\mathbb{N}$ ou bien parce que l'application $n \mapsto 2^n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur cet ensemble.
2. Non, car $\mathbb{R}$ ne l'est pas et cet ensemble "contient" $\mathbb{R}$. Plus précisément, l'application $x \mapsto (0, x)$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
3. Oui, car l'application $\phi : (a, b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ est une surjection (et même une bijection car $\sqrt{2}$ est irrationnel) de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

4. Oui, car c'est une partie de $\mathbb{N}$;
5. Non, car il "contient" $\mathbb{R}$. Plus précisément, l'application $\phi : x \mapsto \phi_x$, où $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : par tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer que pour tout entier p, on a $f_p \neq f$. En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Correction.

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Alors $f(p) = f_p(p) + 1 \neq f_p(p)$ et donc $f \neq f_p$. Si l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ était dénombrable, alors on pourrait les énumérer sous la forme $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Mais on vient de voir que l'on peut construire une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ différent de tous les f_n. C'est une contradiction et $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

c. Familles sommables

Exercice 6.

Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

Correction.

Écrivons que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_-^* \cup \mathbb{N}$. Démontrer la sommabilité de la famille $(q^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ revient à démontrer la sommabilité des deux familles $(q^n)_{n\geq 0}$ et $(q^n)_{n<0}$. $\mathbb{Z}_-^*$ et $\mathbb{N}$ étant facilement mis en bijection avec $\mathbb{N}$, il s'agit de démontrer que les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ et $\sum_{n>1} q^{|-n|}$ convergent absolument. C'est bien le cas puisqu'on a deux séries géométriques de raison dont le module est strictement inférieur à 1. Pour la somme, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{n\geq 0} q^n + \sum_{n\geq 1} q^n \\ &= 2\sum_{n\geq 0} q^n - 1 \\ &= \frac{2}{1-q} - 1 = \frac{1+q}{1-q}.\end{aligned}$$

Exercice 7.

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

Correction.

1. Il y a une infinité de termes dans $\mathbb{Q}\cap[1,2]$. En particulier, il y a une infinité de termes de la famille qui sont supérieurs à $1/4$. Ceci entraîne que la famille n'est pas sommable, ce qu'on retrouver en utilisant la définition. Si chaque somme finie de la série était majorée par M, il suffirait de prendre un ensemble fini F de $\mathbb{Q}\cap[1,2]$ contenant strictement plus de $4M$ éléments pour obtenir
$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x^2}>M,$$
ce qui est une contradiction.
2. Si la famille était sommable, toute sous-famille serait sommable. Prenons $I=\{(n,n+1);\ n\in\mathbb{N}\}$. La famille $(a_{n,m})_{(n,m)\in I}=(a_{n,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ serait donc sommable. Ceci serait équivalent à la convergence de la série
$$\sum_n a_{n,n+1}=\sum_n\frac{1}{2n+1}.$$
Cette dernière série n'étant pas convergente, la famille n'est pas sommable.

Exercice 8.

On pose, pour $(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $a_{m,n}=\frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

Correction.

Notons $I=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et pour $p\geq 2$, $I_p=\{(m,n)\in I; m+n=p\}$. Alors $(I_p)_{p\geq 2}$ est une partition de I. De plus, I_p a pour cardinal $p-1$ et on a donc
$$\sum_{i\in I_p}a_i=\frac{p-1}{p^\alpha}.$$
Par le théorème de sommation par paquets, la convergence de la série $\sum_i a_i$ est équivalent à la convergence de la série $\sum_p\left(\sum_{i\in I_p}a_i\right)=\sum_p\frac{p-1}{p^\alpha}$. Par comparaison à une série de Riemann, cette dernière série converge si et seulement si $\alpha>2$. La famille est sommable si et seulement si $\alpha>2$.

Exercice 9.

Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et pour $(n,p)\in I$, on pose $u_{n,p}=\frac{p}{n(n+1)}a_p$ si $p\leq n$, $u_{n,p}=0$ sinon. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

Correction.

Par le théorème de permutation des sommes, il suffit de prouver que, pour tout $p\geq 1$, la série

$\sum_n |u_{n,p}|$ est convergente, et que la série $\sum_p \left(\sum_{n\geq 1} |u_{n,p}|\right)$ est convergente. Soit donc $p \geq 1$. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} |u_{n,p}| = \sum_{n\geq p} \frac{p|a_p|}{n(n+1)} = p|a_p| \sum_{n\geq p} \frac{1}{n(n+1)} = |a_p|$$

où la dernière égalité vient de l'écriture $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et du fait qu'on réalise une somme télescopique. La série $\sum_n |u_{n,p}|$ est donc bien convergente de somme $|a_p|$. Puisque la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente, on a bien prouvé que la famille était sommable et sa somme est précisément la somme de la série $\sum_p a_p$.

Exercice 10.

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Correction.

On doit montrer la sommabilité de la famille et calculer sa somme. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge, puis que la série $\sum_q \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. La somme de la famille sera alors égale la somme de cette dernière série. Mais, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{N+q^2+1}.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ et de plus

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2}.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 11.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Correction.

On va permuter l'ordre des séries. Pour cela, il suffit de prouver que la famille $(\frac{1}{k!})_{(n,k)\in I}$ où $I = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2; k \geq n\}$ est sommable. S'agissant d'une famille dont tous les termes sont positifs, il suffit de vérifier que la série

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\leq k}\frac{1}{k!}\right)$$

converge (remarquons qu'à l'intérieur, la somme est finie). Mais,

$$\left(\sum_{n\leq k}\frac{1}{k!}\right) = \frac{k+1}{k!}$$

qui est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k\geq 0}\frac{(k+1)}{k!} = 2e.$$

Exercice 12.

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Correction.

D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n\geq 0}a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0}b^n.$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a| < 1$ et $|b| < 1$. On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que

$$\frac{1}{1-a}\times\frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0}w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}.$$

Si $a = b$, on trouve directement que $w_n = \sum_{k=0}^{n}a^n = (n+1)a^n$. Si $a \neq b$, alors il faut utiliser la factorisation

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\times\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$$

qui donne le résultat.

2. Exercices d'entraînement

a. Comparaison série-intégrale

Exercice 13.

Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Correction.

On va d'abord déterminer un équivalent du numérateur par encadrement à une intégrale. En effet, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}dx \leq \sqrt{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}dx.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 1 à n pour trouver

$$\int_0^n \sqrt{x}dx \leq v_n \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx$$

où on a posé

$$v_n = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}.$$

On calcule les intégrales, et on en déduit que

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

Il vient

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}-\alpha}.$$

La série $\sum_n u_n$ converge donc si et seulement si $\alpha > \frac{5}{2}$. On peut aussi démontrer ceci par des majorations et des minorations un peu plus simple. D'abord, il est clair que

$$0 \leq u_n \leq \frac{n\sqrt{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}},$$

ce qui démontre la convergence si $\alpha > 5/2$. D'autre part, si k est compris entre $n/2$ et n, alors $\sqrt{k} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ et donc

$$u_n \geq \frac{\left(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right)\sqrt{n}}{\sqrt{2}n^\alpha}.$$

Notons v_n le membre de droite de cette inégalité. Il est équivalent à $\frac{C}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$. Si $\alpha \leq 3/2$, la série $\sum_n v_n$ diverge et il en est de mêmede $\sum_n u_n$ puisque $0 \leq v_n \leq u_n$.

Exercice 14.

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Correction.

1. On fixe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :
$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} = 0$$
et ceci quelque soit la valeur de β. Autrement dit, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.
2. On va comparer cette fois à la série de terme général $\frac{1}{n}$. On a en effet
$$\lim_{n\to\infty} n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty.$$
Ainsi, pour n assez grand, on a
$$\frac{1}{n} \leq u_n.$$
Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général u_n diverge.
3. (a) Si $\beta \leq 0$, alors on a
$$\frac{1}{n} \leq u_n$$
et on conclut comme précédemment que la série est divergente.
   (b) Si $\beta \neq 1$, on a
$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}\right).$$
Si $\beta > 1$, ceci tend vers $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$ et on a même que pour tout entier n, on a
$$T_n \leq \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}.$$
Si $\beta < 1$, on remarque immédiatement que (T_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $\beta = 1$, on sait que
$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$
et ceci tend aussi vers $+\infty$.

(c) Il reste à traiter le cas $\beta > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. On a alors pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On en conclut que, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série est majorée (par $\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$) et donc comme on a une série à termes positifs, la série est convergente. Si $\beta \leq 1$, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que la suite des sommes partielles est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Elle tend donc elle-même vers $+\infty$. La série est divergente.

b. Dénombrabilité

Exercice 15.

On dit que deux ensembles E et F sont **équipotent** et on note $E \simeq F$ s'il existe une bijection de E dans F.

1. Montrer que $\simeq$ est réflexive, symétrique et transitive.
2. Montrer que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$, $[a, b] \simeq [c, d]$ (et aussi $]a, b[\simeq]c, d[$, $]a, b] \simeq]c, d]$ et $[a, b[\simeq [c, d[$
3. Montrer que $]0, 1] \simeq]0, 1[$ (indice : prendre l'identité sauf pour les nombres de la forme $\frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$) puis que $]0, 1[\simeq [0, 1]$.
4. En déduire que $\mathbb{R} \simeq [0, 1]$.

Correction.

1. réflexivité : prendre l'identité ; symétrie : prendre la réciproque ; transitivité : prendre la composée.
2. La fonction affine $f : [a, b] \to [c, d]$ telle que $f : x \mapsto \frac{d-c}{b-a}x + \frac{ad-bc}{b-a}$ est une bijection et il en est de même pour les intervalles ouverts ou semi-ouverts.
3. Définissons f sur $]0, 1]$ par $f(1/n) = 1/(n+1)$ pour tout $n \geq 1$, et $f(x) = x$ sinon. Alors f est une bijection de $]0, 1]$ sur $]0, 1[$ et donc ces deux ensembles sont équipotents.

   De plus remarquons que $[0, 1]$ est équipotent à $[0, 1[$ (la même application que précédemment fonctionne). On a alors
   — $]0, 1[$ est équipotent à $]0, 1]$;
   — $]0, 1]$ est équipotent à $[0, 1[$ (considérer $f(x) = 1 - x$) ;
   — $[0, 1[$ est équipotent à $[0, 1]$.
   L'équipotence étant transitive, on obtient le résultat.
4. D'après les questions précédentes, $[0, 1] \simeq] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et de plus, la fonction arctan est une

bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par transitivité de l'équipotence, on obtient $\mathbb{R} \simeq [0,1]$.

Exercice 16.

1. Déterminer la somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}}$.
2. Soit (u_n) une suite de $[0,1]$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un élément x_n dans $[0,1]\backslash \bigcup_{k=0}^{n} \left[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}\right]$.
3. Pourquoi peut-on extraire de la suite (x_n) une sous-suite convergente vers $\ell \in [0,1]$?
4. Démontrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable et en déduire que $\mathbb{R}$ également.

Correction.

1. Par la formule de calcul des sommes géométriques, on trouve que
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$
2. La longueur de chaque intervalle $\left[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}, u_k + \frac{1}{2^{k+2}}\right]$ est $1/2^{k+1}$. La somme des longueurs de ces intervalles, pour k allant de 0 à n, est strictement inférieure à 1 d'après la question précédente. Ces intervalles ne peuvent pas donc recouvrir $[0,1]$.
3. (x_n) est une suite bornée de $[0,1]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente vers $\ell \in [0,1]$.
4. Procédons par l'absurde, et supposons que $[0,1]$ soit dénombrable. Alors, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $[0,1] = \{u_n;\ n \geq 0\}$. On construit une suite (x_n) comme dans les questions précédentes, et on note ℓ la limite d'une suite extraite de (u_n). Puisque $\ell \in [0,1]$, il existe p tel que $\ell = u_p$. Mais pour tout $n \geq p$, on sait que $x_n \notin \left[\ell - \frac{1}{2^{p+2}}, \ell + \frac{1}{2^{p+2}}\right]$. Ceci contredit le fait qu'une suite extraite de (x_n) converge vers ℓ.

Exercice 17.

On dit qu'un réel x est dit nombre algébrique s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients entiers tel que x est racine de P i.e.
$$P(x) = 0.$$
Si x est algébrique, on dit que x est algébrique de degré d si le degré minimal d'un polynôme dont x est racine est égal à d.

1. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
2. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré d est au plus dénombrable.
3. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Correction.

1. Les nombres algébriques de degré 1 sont exactement les nombres rationnels.
2. Posons $I_d = \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^*$. Pour $a = (a_0, \dots, a_d) \in I_d$, posons
$$E_a = \{x \in \mathbb{R};\ a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 = 0\}.$$
Alors E_a est fini, car un polynôme de degré d admet au plus d racines. Mais l'ensemble des nombres algébriques de degré d est contenu dans $\bigcup_{a\in I_d} E_a$: ce dernier ensemble est une réunion dénombrable d'ensembles finis, il est donc dénombrable et il en est de même des entiers algébriques de degré d.
3. En écrivant l'ensemble des entiers algébriques comme réunion (dénombrable !) de tous les entiers algébriques de degré d, pour d parcourant $\mathbb{N}^*$, on obtient bien que cet ensemble est dénombrable.

c. Familles sommables

Exercice 18.

1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Correction.

1. C'est très classique, il suffit de comparer à une intégrale. En effet, pour $k \geq 2$, on a
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$
En sommant cette inégalité pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, et en calculant les intégrales résultantes, on trouve
$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$
et donc
$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha}.$$
2. Pour que la série à l'intérieur converge, il est nécessaire et suffisant que $\alpha > 1$. On a alors trouvé un équivalent de cette somme, et pour que la série à l'extérieur converge, il est alors nécessaire et suffisant que $\alpha > 2$. On peut donc donner un sens à cette expression si et seulement si $\alpha > 2$.
3. Comme les termes de la famille sont positifs, démontrer que cette expression a un sens revient à prouver que la famille est sommable, ou encore que l'on peut donner un sens à la

double somme "permutée", c'est-à-dire à

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n<k}\frac{1}{k^\alpha}.$$

Mais la somme à l'intérieur vaut $\frac{1}{k^{\alpha-1}}$ et on est ramené à l'étude de la série $\sum_k \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha>2$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n<k}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Exercice 19.

Soit $x\in]-1,1[$.

1. Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$$
où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Correction.

1. Il suffit, par le théorème de permutation des sommes, de démontrer que, pour chaque $k\geq 1$, la série $\sum_l |x|^{kl}$ converge, et que la série $\sum_k\sum_{l\geq 1}|x|^{kl}$ est aussi convergente. Mais, puisque $|x|<1$, la première série converge, de somme
$$\sum_{l\geq 1}x^{kl}=\frac{|x|^k}{1-|x|^k}.$$
Maintenant,
$$\frac{|x|^k}{1-|x|^k}\sim_{k\to+\infty}|x|^k$$
et donc la série $\sum_{k\geq 1}\frac{|x|^k}{1-|x|^k}$ est convergente.
2. Calculons de deux façons différentes la somme de la famille sommable. D'une part, en procédant par sommation successive comme dans la question précédente, on a
$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}x^{kl}=\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{1-x^k}.$$
D'autre part, posons, pour $n\geq 1$, $I_n=\{(k,l);\ k\cdot l=n\}$. Alors on a aussi
$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}x^{kl}=\sum_{n\geq 1}\sum_{(k,l)\in I_n}x^{kl}=\sum_{n\geq 1}\mathrm{card}(I_n)x^n.$$
Mais le cardinal de I_n est justement le nombre de diviseurs de n (on peut choisir pour k n'importe quel diviseur positif de n, et ceci définit aussi uniquement l).

Exercice 20.

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u \star v$ par $(u\star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$ où $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, puis calculer $N(u\star v)$ en fonction de $N(u)$ et de $N(v)$.
3. Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.
4. On définit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$.

Correction.

1. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, la famille (v_n) est majorée. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que, pour tous les entiers k et n, $|u_k v_{n-k}| \leq M|u_k|$. Puisque $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable, il en est de même de $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$.
2. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k| \cdot |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$. La famille $(|u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|)_{k\in\mathbb{Z}}$ est elle-même sommable, de somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$. Ainsi, la famille $(u_k v_{n-k})_{(k,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable, de somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$. On en déduit que la famille $(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de même somme. Finalement, en prenant partout des modules, on a bien
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|,$$
c'est-à-dire que $N(u\star v) = N(u) \times N(v)$.
3. On peut remarquer que $(u\star v)_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l$. On en déduit immédiatement la commutativité. Pour l'associativité, il suffit d'écrire
$$((u\star v)\star w)_n = \sum_{k+l+m=n} u_k v_l w_m = (u\star(v\star w))_n.$$
L'élément neutre est donné par la suite δ vérifiant $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ sinon.
4. Imaginons que u soit inversible et notons v son inverse. Alors $(u\star v)_n = v_n - v_{n-1}$. Pour $n \geq 1$, on obtient $v_n = v_{n-1}$ et finalement $v_n = v_0$. Mais puisque (v_n) est sommable, ceci entraîne que $v_0 = 0$. Pour $n \leq 0$, on écrit encore que $v_{n-1} = v_n$, ce qui entraîne que $v_n = v_0 = 0$ pour tout $n < 0$. Ce n'est pas possible, car si v est identiquement nulle $u\star v$ l'est aussi et n'est pas égal à l'élément neutre δ.

Exercice 21.

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Correction.

L'exercice repose sur la définition de l'exponentielle par une série : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour chaque $n \geq 0$, w_n est positif et satisfait

$$w_n \leq 2^{-n} \exp(4).$$

   Puisque la série de terme général $2^{-n}\exp(4)$ est convergente, il en est de même de la série de terme général w_n.

2. Écrivons le produit de Cauchy de $\sum_{k\geq 0} \frac{b^k}{k!}$ par $\sum_{k\geq 0} a^k$, où a et b sont des réels. Ces deux séries sont absolument convergentes, et on a :

$$\exp(b) \times \frac{1}{1-a} = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{b^k}{k!}\right) \times \left(\sum_{k\geq 0} a^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

   où u_n est défini par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(b/a)^k}{k!}.$$

   Pour $a = 1/2$ et $b = 2$, on trouve $w_n = u_n$. Ainsi, on a

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \exp(2) \times \frac{1}{1-1/2} = 2\exp(2).$$

3. Exercices d'approfondissement

a. Comparaison série-intégrale

Exercice 22.

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Correction.

Pour $k \geq 1$, puisque la fonction $\ln^2$ est croissante sur $[1, +\infty[$, on a

$$\ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)dt \leq \ln^2(k+1).$$

En sommant ces inégalités de $k = 1$ jusque $k = n$, on trouve

$$u_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt \leq u_{n+1} - \ln^2(1),$$

ce qui s'écrit encore
$$\int_1^n \ln^2(t)dt \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt.$$
On calcule ensuite $\int_1^x \ln^2(t)dt$ par une intégration par parties
$$\begin{aligned}\int_1^x \ln^2(t)dt &= \left[t\ln^2(t)\right]_1^x - 2\int_1^x \ln(t)dt\\ &= x\ln^2(x) - 2[t\ln t - t]_1^x\\ &= x\ln^2(x) - 2x\ln x + 2x - 2.\end{aligned}$$
Ainsi, on trouve
$$n\ln^2(n) - 2n\ln n + 2n - 2 \leq u_n \leq (n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2.$$
Ceci prouve que $u_n \sim_{+\infty} n\ln^2(n)$. Ainsi, $\frac{1}{u_n} \sim_{+\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$. Mais la série $\frac{1}{n\ln^2(n)}$ est convergente (c'est une série de Bertrand convergente, pour prouver la convergence, on compare à une intégrale, et on utilise que $\int_2^x \frac{dt}{t\ln^2 t} = -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$). Donc la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.

Exercice 23.

Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$.

Correction.

Posons, pour $a>0$, $S(a)=\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$. Cette quantité est bien définie car on a affaire à une série à terme positif dont le terme général est équivalent à $\frac{a}{n^2}$. La fonction $x\mapsto\frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit, par comparaison à une intégrale, que
$$\int_1^{N+1}\frac{a}{a^2+x^2}\leq\sum_{n=0}^N\frac{a}{n^2+a^2}\leq\int_0^N\frac{a}{a^2+x^2}dx.$$
On calcule ces intégrales et on trouve
$$\arctan\left(\frac{N+1}{a}\right)-\arctan\left(\frac{1}{a}\right)\leq S(a)\leq\arctan\left(\frac{N}{a}\right).$$
On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve
$$\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{a}\right)\leq S(a)\leq\frac{\pi}{2}.$$
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que
$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 24.

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, démontrer que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est convergente.

Correction.

On va comparer à une intégrale chaque terme $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$. Ce ne semble pas si facile ! Mais on peut remarquer que, pour $n \geq 2$,

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On en déduit, pour tout $N \geq 2$, que

$$\sum_{n=2}^N \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_1}^{S_N} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)S_1^{\alpha-1}}.$$

La série est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées : elle est convergente.

Exercice 25.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n).$$
Démontrer que $\sum_n u_n$ est absolument convergente.
2. Démontrer que la série numérique $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ converge.
3. Application : étudier la nature de $\sum_n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Correction.

1. On écrit que
$$u_n = \int_n^{n+1} \big(f(t) - f(n)\big)dt.$$
Il vient
$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)|dt.$$
Or, pour tout $t \in [n, n+1]$, on a
$$f(t) - f(n) = \int_n^t f'(u)du$$
d'où il vient
$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} \int_n^t |f'(u)|dudt \leq \int_n^{n+1} \int_n^{n+1} |f'(u)|dudt \leq \int_n^{n+1} |f'(u)|du.$$

Puisque f' est intégrable, on sait que la suite $\left(\int_1^n |f'(t)|dt\right)$ converge, ou encore que la série $\sum_n \int_n^{n+1} |f'(t)|dt$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_n |u_n|$ converge.

2. C'est presque immédiat. On écrit en effet

$$f(n) = u_n - \int_n^{n+1} f(t)dt.$$

Puisque la série $\sum u_n$ converge, la convergence de $\sum f(n)$ équivaut à la convergence de $\sum_n \int_n^{n+1} f(t)dt$, c'est-à-dire à la convergence de la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$.

3. Posons $f(t) = \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}$. On va déjà prouver que l'on est dans les conditions d'application du résultat précédent. Pour cela, on remarque que

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}) - \sin(\sqrt{t})}{t^2} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ainsi, f' est bien intégrable sur $[1, +\infty[$. On prouve ensuite que la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ est convergente. C'est classique. Par le changement de variables $u = \sqrt{t}$, on a

$$\int_1^n \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt = 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin u}{u}.$$

La convergence de cette dernière intégrale se démontre en effectuant une intégration par parties...