Feuille d'exercices n°15

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
3. Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
4. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Exercice 2.

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in]0,1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 3.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 4.

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n(1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice 5.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6.

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ pour $a \in]0, 1]$.

Exercice 8.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 9.

On définit une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. Montrer que

- (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction dérivable f ;
- (f_n') converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction g ;
- $f' \neq g$.

Exercice 10.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 11.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12.

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Exercice 13.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ est convergente. On note $S(t)$ sa somme.
2. Démontrer que S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$ (on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
4. Quel est le sens de variation de S ?
5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in -]t_0, t_0[\backslash\{0\}$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

6. En déduire que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
7. Tracer la courbe représentative de S.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 14.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$;
2. $f_n(x) = (\sin x)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, bornée, et vérifiant $f(0) = 0$. On pose, pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2} f(x).$$

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a < b$ deux réels. Pour $x \in [a, b]$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a, b]$.
2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 18.

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
   (b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
   (c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout

$x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i. la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
      ii. la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 19.

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer S'.

Exercice 20.

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe réprésentative de ζ.

Exercice 21.

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

On note f sa somme.

2. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que $f(x_0) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 22.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
5. Justifier que S admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier N, on a
$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} S(x)$.

Exercice 23.

Soit la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que
$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2}dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2}dt.$$
3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 24.

Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

1. Montrer que S est définie et continue sur I.

2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
5. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 25.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

Exercice 26.

On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

3. En déduire que la convergence est uniforme sur I.

Exercice 27.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note f sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. On fixe $A > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

   (b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta[$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

(c) Démontrer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 28.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(t) = \dfrac{1}{n}\, t^n \sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. Soit $a \in]0,1[$.
   (a) Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
   (b) En déduire que la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que, pour $x \in]-1,1[$,
   $$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1 - 2x\cos x + x^2}.$$
   (c) Montrer que $f(t) = \arctan \dfrac{t\,\sin t}{1 - t\,\cos t}$ pour $t \in]-1,1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$, $A_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^k \sin k\,t$.
   (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$ on ait $|A_n(t)| \leqslant M$.
   (b) Montrer en écrivant $t^k \sin(k\,t) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \sin k\,t}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$
   (c) En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.
   (d) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$.

Exercice 29.

On considère la fonction $\mu(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition de μ ?
2. Montrer que μ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que μ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.
4. On souhaite démontrer que μ admet une limite en 0.

(a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right).$$

(b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

(c) Conclure.