Corrigé de la feuille d'exercices n°15

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
3. Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
4. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Correction.

1. On a, pour $x \neq 1$,
$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x},$$
et donc la suite de réels $(f_n(x))$ converge vers le réel $f(x) = \frac{1}{1-x}$ si $x \in]-1,1[$. Elle est divergente dans les autres cas (c'est aussi vrai si $x = 1$). La suite (f_n) converge donc simplement vers f sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. En vertu du calcul de f_n réalisé à la question précédente, on a
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x},$$
qui tend vers $+\infty$ si x tend vers 1. D'où $\sup_{x\in]-1,1[} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ et la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
3. On va majorer $|\varphi_n(x)|$ pour $x \in [-a,a]$. On pourrait le faire en étudiant les variations de φ_n, mais c'est en réalité inutile ici. En effet, on peut remarquer que si $x \in [-a,a]$, on a $|x^n| \leq a^n$ et $|1-x| \geq 1-a$. On en déduit que, pour tout $x \in [-a,a]$, on a
$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{a^n}{1-a}$$
et le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. On en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Exercice 2.

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in]0,1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Correction.

1. Montrons que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$:
   — Si $x = 0$ ou $x = 1$, $(f_n(x))$ est la suite constante égale à 0.
   — Si $x \in]0,1[$, alors $(f_n(x))$ tend vers 0 par comparaison d'une suite polynomiale et d'une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]0,1[$. Remarquons que $\ln x$ ne joue aucun rôle dans cette étude.
2. On a pour tout $x \in]0,1]$,
$$g'(x) = -nx^{n-1}(n \ln x + 1).$$
La dérivée s'annule en $e^{-1/n}$ et la fonction g est croissante sur $]0, e^{-1/n}[$ puis décroissante sur $]e^{-1/n}, 1[$.
3. On déduit de la question précédente que
$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = |(f - f_n)(e^{-1/n})| = e^{-1}.$$
La convergence n'est donc pas uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
4. La suite $(e^{-1/n})$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $e^{-1/n} \geq a$. Ainsi, pour $n \geq n_0$, la fonction g est monotone croissante sur $[0,a]$. Puisqu'elle s'annule en 0, on en déduit que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \geq n_0$, on a
$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(a) - f_n(a)| = na^n |\ln a|.$$
Le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0. On en déduit que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,a]$.

Exercice 3.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Correction.

1. L'inégalité $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$ prouve que f_n converge simplement vers la fonction nulle. Posons

$g(x) = e^{-x}\sin(2x)$. On a $f_n(x) = g(nx)$, et donc la suite

$$\|f_n\|_\infty = \|g\|_\infty > 0$$

vaut une constante strictement positive, elle ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to +\infty$: la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. En revanche, si $a > 0$ et $x \geq a$, on a :

$$|f_n(x)| \leq e^{-na},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

2. Si $x \neq 0$, $(f_n(x))$ tend vers 0 (c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]0, 1[$), et si $x = 0$, alors la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 1. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction f égale à 1 en 0 et égale à 0 partout ailleurs. La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ car chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction limite ne l'est pas en 0. En revanche, la convergence est uniforme sur les intervalles du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, puisque pour tout $x \geq a$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$$

et le dernier terme de cette inégalité (qui ne dépend plus de $x \in [a, +\infty[$), tend vers 0.

Exercice 4.

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n(1 - x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Correction.

Pour $x = 1$, on a $f_n(1) = 0$ quelque soit n. Pour $x \in [0, 1[$, par croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles, on sait que $f_n(x)$ tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$. Pour étudier la convergence uniforme, on doit étudier la suite $\|f_n - 0\|_\infty$. Pour cela, on dérive f_n :

$$f_n'(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}\left(n(1-x) - x\right).$$

Ainsi, f_n' s'annule en 0 et en $x_n = \frac{n}{n+1}$ qui sont tous les deux des points de $[0, 1]$. Puisque $f_n(0) = f_n(1) = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_\infty &= |f_n(x_n)| \\
&= n^a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{n^a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.
\end{aligned}$$

Or, en passant par l'exponentielle et le logarithme, on prouve facilement que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}.$$

On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty \sim_{+\infty} e^{-1}n^{a-1}.$$

Ainsi, (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$ (ie $(\|f_n\|_\infty)$ tend vers 0) si et seulement si $a<1$.

Exercice 5.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Correction.

Les fonctions f_n sont paires, on peut restreindre l'étude à $[0,+\infty[$. $f_n(0)=n$ et donc $(f_n(0))$ diverge. Pour $x>0$, la comparaison des fonctions puissance et exponentielle fait que $(ne^{-n^2x^2})$ tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Passons à l'étude de la convergence uniforme. Sur $[a,+\infty[$, les fonctions (f_n) sont positives et décroissantes. On a donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)-0| \leq f_n(a)$$

et comme $(f_n(a))$ tend vers 0, il en est de même de $(\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)-0|)_n$. La convergence est donc uniforme sur $[a,+\infty[$. Sur $]0,+\infty[$, on a

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(1/n) = ne^{-1} \to +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $]0,+\infty[$.

Exercice 6.

Soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$. Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Correction.

On peut écrire $f_n=\sqrt{g_n}$ avec $g_n(x)=x^2+\frac{1}{n}$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x\mapsto x^2+\frac{1}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,+\infty[$. On en déduit par composition que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il est ensuite clair que pour tout $x\in\mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $\sqrt{x^2}=|x|$. On a donc convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0. Reste à prouver la convergence uniforme. Pour cela, on va utiliser la quantité conjuguée. En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$0\leq \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\leq \frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}} \leq \frac{1/n}{1/\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de (f_n) vers la fonction fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$.

Correction.

1. Si $x = 0$, la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0. Si $x > 0$, alors il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} < x$. On en déduit que pour tout $n \geq N$, $f_n(x) = 0$. Dans ce cas, la suite $(f_n(x))$ est stationnaire et stationne à 0. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
2. On a
$$\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^{1/n} n^2x(1-nx)dx = \int_0^1 u(1-u)du = \frac{1}{6}.$$
Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme de (f_n) vers la fonction nulle sur $[0,1]$, sinon on aurait
$$\frac{1}{6} = \int_0^1 f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t) = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_0^1 0dt = 0.$$
3. On reprend la méthode de la première question en la précisant. Puisque $a > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} < a$. Mais alors, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [a,1]$, $f_n(x) = 0$. Autrement dit, pour $n \geq N$, $\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x)| = 0$. Ceci prouve la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f sur $[a,1]$.

Exercice 8.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Correction.

1. Pour $x=0$, on a $f_n(x)=0$. Pour $x\neq 0$, on a $f_n(x)\sim_{+\infty}\frac{2^nx}{n2^nx^2}\to 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. On a
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{2^nx}{1+2^nnx^2}dx\\ &= \left[\frac{1}{2n}\ln\left(1+2^nnx^2\right)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2n}\ln(1+2^nn). \end{aligned}$$
Ainsi, on trouve que
$$I_n\sim_{+\infty}\frac{1}{2n}\ln(2^nn)=\frac{n\ln 2+\ln n}{2n}\to\frac{\ln 2}{2}.$$
Si la suite (f_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, on aurait d'après le théorème d'inversion limite/intégrale
$$\frac{\ln 2}{2}=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt=\int_0^1\lim_n f_n(t)dt=\int_0^1 0dt=0.$$
Ce n'est pas le cas, donc on n'a pas convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
3. Posons $x_n=\frac{1}{2^n}$. Alors
$$f_n(x_n)=\frac{1}{1+\frac{n}{2^n}}\to 1.$$
En particulier, pour n assez grand, on a
$$\|f_n-0\|_\infty\geq f_n(x_n)\geq 1/2.$$
Ceci prouve directement que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 9.

On définit une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$. Montrer que
- (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction dérivable f ;
- (f_n') converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g ;
- $f'\neq g$.

Correction.

On commence par remarquer que $f_n(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et que, pour $x\neq 0$, on a
$$f_n(x)\sim_{n\to+\infty}\frac{x}{n^2x^2}=\frac{1}{n^2x}.$$
Ainsi, $f_n(x)\to 0$ pour tout $x\in[0,1]$ et (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle, que nous noterons f. Étudions maintenant la convergence uniforme. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est

dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

On en déduit que $f_n' \geq 0$ sur $[0,1/n]$ et que $f_n' \leq 0$ sur $[1/n,1]$. Puisque $f_n(0) = 0$ et que $f_n(1) = \frac{1}{1+n^2}$, la fonction f_n est positive sur $[0,1]$ et atteint son maximum en $1/n$ (unique valeur où la dérivée s'annule). On a donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1/n) = \frac{2}{n} \to_{n\to+\infty} 0.$$

On a donc bien démontré la convergence uniforme sur $[0,1]$ de (f_n)vers f qui est dérivable avec $f' = 0$. Étudions désormais la suite de fonctions dérivées. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n'(0) = 1$ et, pour $x \in]0,1]$, $f_n'(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{-n^2x^2}{n^4x^4}$. Ainsi, (f_n') converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction g définie par $g(0) = 1$ et $g'(x) = 0$ pour $x \in]0,1]$. Bien évidemment, $f' \neq g$. L'intérêt de cet exercice est donc de mettre en valeur l'importance des hypothèses dans le théorème de dérivabilité de la limite.

Exercice 10.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Correction.

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Alors $n^2u_n(x) = x^2e^{-x\sqrt{n}+3\ln n}$ tend vers 0. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n u_n(x)$ est convergente.
2. On va calculer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)|$. On remarque d'abord que u_n est une fonction positive. De plus, elle est dérivable et sa dérivée vaut

$$u_n'(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

On en déduit que u_n est croissante sur l'intervalle $[0, 2/\sqrt{n}]$ et décroissante sur l'intervalle $[2/\sqrt{n}, +\infty[$. On a donc

$$\|u_n\|_\infty = u_n(2/\sqrt{n}) = 4e^{-2}.$$

C'est le terme général d'une série (grossièrement) divergente, et donc la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $a \geq 2/\sqrt{n}$ et donc la fonction u_n est décroissante sur $[a,+\infty[$. On en déduit que, pour tout $x \geq a$, on a

$$|u_n(x)| \leq u_n(a).$$

Le membre de droite est le terme général d'une série numérique (il ne dépend plus de x) convergente : ceci prouve la convergence normale de la série $\sum_n u_n$ sur $[a,+\infty[$. Remarquons que le fait que l'inégalité ne soit vraie qu'à partir d'un certain rang (qui est indépendant de $x \in [a, +\infty[$) ne change rien à la convergence normale.

4. Notons R_n le reste d'ordre n de la série. Puisque $u_k \geq 0$ pour tout k, on a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq u_{n+1}(x).$$

D'après le résultat de la question 2.,

$$\|R_n\|_\infty \geq \|u_{n+1}\|_\infty = 4e^{-2}.$$

Ceci ne tend pas vers 0 et donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Pour $x = 0$, la série converge car $u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$ fixé, on a

$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc la série $\sum_n u_n(x)$ converge.

2. Une étude rapide de u_n montre qu'elle atteint son maximum en $1/n$. On a donc

$$\sum_{n\geq 2} \|u_n\|_\infty = \sum_{n\geq 2} u_n(1/n) = \sum_{n\geq 2} \frac{e^{-1}}{n \ln n}.$$

Il est bien connu que cette dernière série est divergente, et donc la convergence n'est pas normale.

3. On va utiliser la somme d'une série géométrique. En effet, pour $x > 0$, on a $e^{-kx} = (e^{-x})^k$ et $0 < e^{-x} < 1$. De plus, pour $k \geq n+1$, on a

$$0 \leq u_k(x) \leq \frac{x(e^{-x})^k}{\ln(n+1)}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Or, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On peut étudier cette fonction ou remarquer que

— Elle se prolonge par continuité en 0 : en effet

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x+o(x)}{x+o(x)} \to 1.$$

— La fonction est donc bornée sur tout intervalle du type $[0, A]$.

— La fonction tend vers 0 en $+\infty$, on sait donc que sa valeur absolue est majorée par 1 sur un certain intervalle $[A, +\infty[$.

On peut aussi écrire

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$$

puisque par convexité de la fonction exponentielle, $e^x - 1 \geq x$. Soit M un majorant de la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$. On a donc, pour tout $x \geq 0$ (l'inégalité est aussi valable pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

On a majoré le reste par quelque chose qui ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}_+$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12.

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Correction.

1. Il est clair que la suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_n$, pour $x > -1$ fixé, est positive, décroissante et tend vers 0. Par application du critère des séries alternées, la série est convergente pour tout $x > -1$.
2. Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. Nous avons vérifié à la question précédente que, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_n u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, on sait que son reste $R_n(x)$ vérifie
$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{x+n+1}.$$
Puisque $x > -1$, on a en particulier
$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$
Ceci tend vers 0 (indépendamment de x), de sorte qu'on a prouvé la convergence uniforme de la série $\sum_n u_n(x)$ sur I. Puisque chaque fonction u_n est continue, la fonction S est continue sur I.

3. Chaque fonction u_n est dérivable sur I avec $u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De même qu'à la question précédente, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ est convergente car elle vérifie les conditions du critère des séries alternées. De plus, si on note $T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)$ son reste, on a $|T_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, inégalité valable pour tout $x > -1$. On peut donc majorer **uniformément** le reste par une quantité qui tend vers 0 : la série dérivée est uniformément convergente. On en déduit que la fonction S est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De plus, on sait qu'on peut encadrer la somme d'une série alternée par deux sommes partielles consécutives, par exemple ici
$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \leq u'(x) \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$
En particulier, la dérivée est positive et la fonction est croissante.
4. De même qu'à la question précédente, par le critère des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives :
$$\frac{-1}{x+1} \leq S(x) \leq \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$
Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement des limites pour prouver que
$$\lim_{x\to -1} S(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} S(x) = 0.$$

Exercice 13.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ est convergente. On note $S(t)$ sa somme.
2. Démontrer que S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$ (on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
4. Quel est le sens de variation de S ?
5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in -]t_0, t_0[\backslash\{0\}$, on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
6. En déduire que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
7. Tracer la courbe représentative de S.

Correction.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|u_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. La série $\sum_n u_n(t)$ est donc absolument convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. L'argument de la question précédente prouve qu'en réalité, la convergence est normale sur $\mathbb{R}$ (on a obtenu une majoration qui ne dépend pas de t). Puisque chaque fonction u_n est

continue sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même de S. De plus, chaque u_n est impaire, et donc S est impaire.

3. Puisque la série converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de la double limite et on a

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

4. Puisque la fonction arctan est croissante, chaque u_n est croissante. On en déduit que S est croissante.
5. Remarquons que, pour tout $n \geq 1$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{u_n(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\arctan(nt)}{n(nt)} = \frac{1}{n} \lim_{u\to 0} \frac{\arctan u}{u} = \frac{1}{n}.$$

Puisqu'on a une somme finie, on a

$$\lim_{t\to 0} \sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \lim_{t\to 0} u_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, on obtient le résultat demandé.

6. Fixons $A > 0$. Alors, puisque la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente, il existe un entier N tel que

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq A.$$

D'après la question précédente, il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in [-t_0, t_0]\backslash\{0\}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geq A.$$

Puisque pour $t \neq 0$, $\arctan(nt)/t \geq 0$, on en déduit que, pour tout $t \in]t_0, t_0[\backslash\{0\}$,

$$\frac{S(t)}{t} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geq A.$$

Ceci prouve que $\lim_{t\to 0} \frac{S(t)-S(0)}{t-0} = +\infty$, ce qui prouve que la courbe représentative de S admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 14.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$;
2. $f_n(x) = (\sin x)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. Puisque
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}},$$
il est clair que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^+$. Pour étudier la convergence uniforme, remarquons que f_n s'écrit :
$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}} = \frac{1}{\sqrt{n}}g(nx),$$
où $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(0) = 0$. Prouvons que g est bornée : d'abord, g est continue sur $[1, +\infty[$, et elle admet une limite finie (=0) en $+\infty$: g est bornée sur $[1, +\infty[$. D'autre part, puisque $\sin x \sim x$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, et g est continue sur $[0, 1]$: elle y est donc bornée, et finalement g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Maintenant,
$$\|f_n\|_\infty = \left\|\frac{1}{\sqrt{n}}g\right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}\|g\|_\infty \to 0,$$
ce qui prouve la convergence uniforme vers 0.
2. Pour $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0 car c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]-1, 1[$. Si $x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0. La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Pour étudier $\|f_n\|_\infty$, il suffit par périodicité et parité de se restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$. Mais alors, pour tout $x \in [0, \pi]$, on a
$$f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)\big((n+1)\cos^2(x) - 1\big).$$
f_n' s'annule sur $[0, \pi]$ en $x_0 \in [0, \pi/2]$ et $x_1 \in [\pi/2, \pi]$ tel que $\cos^2(x_0) = 1/(n+1)$ et $\cos^2(x_1) = 1/(n+1)$. Ainsi, f_n est croissante sur $[0, x_0]$, décroissante sur $[x_0, x_1]$ et croissante sur $[x_1, \pi]$. Puisqu'elle s'annule en 0 et en π, on en déduit que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \max\big(|f_n(x_0)|, |f_n(x_1)|\big) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
(on a simplement majoré le sinus par 1). Le membre de droite de cette dernière inégalité tendant vers 0, on en déduit que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
3. On a $\frac{(n-1)x}{n} \to x$ et donc, par théorème de composition des limites, $f_n(x) \to e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers e^x sur $\mathbb{R}$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. En effet, on a On a
$$\begin{aligned} \exp(n) - f_n(n) &= \exp(n) - \exp(n-1) \\ &= \exp(n)\,(1 - \exp(-1)) \end{aligned}$$
et ceci tend vers $+\infty$. En revanche, on a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $]-\infty, b]$. En effet, fixons $b \in \mathbb{R}$ qu'on peut supposer positif, et prenons $x \in]-\infty, b]$.

Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned}\left|\exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)-\exp(x)\right| &\leq \left|\frac{(n-1)x}{n}-x\right|\sup_{t\in I_x}|\exp(t)|\\ &\leq \frac{|x|}{n}\sup_{t\in I_x}|\exp(t)|\end{aligned}$$

où I_x est l'intervalle $\left[\frac{(n-1)x}{n},x\right]$ si $x>0$, l'intervalle $\left[x,\frac{(n-1)x}{n}\right]$ si $x\leq 0$. Mais, si $x\in[0,b]$, alors

$$\frac{|x|}{n}\sup_{t\in I_x}|\exp(t)|\leq\frac{b\exp b}{n}.$$

Si $x<0$, alors

$$\frac{|x|}{n}\sup_{t\in I_x}|\exp(t)|\leq\frac{|x|\exp(x/2)}{n}.$$

Or, il est très facile de vérifier que la fonction $x\mapsto|x|\exp(x/2)$ est majorée sur $]-\infty,0]$. C'est en effet une fonction continue qui tend vers 0 en $-\infty$. Ainsi, il existe M tel que, pour tout $x<0$,

$$|x|\exp(x/2)\leq M.$$

On en déduit, pour tout $x\in]-\infty,b]$,

$$\left|\exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)-\exp(x)\right|\leq\frac{\max(be^b,M)}{n},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $]-\infty,b]$.

Exercice 15.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, bornée, et vérifiant $f(0)=0$. On pose, pour $n\geq 0$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n(x)=\frac{1}{1+(nx)^2}f(x).$$

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Correction.

On va prouver la convergence uniforme en revenant à la définition. Soit donc $\varepsilon>0$. Puisque f est continue en 0 et que $f(0)=0$, il existe $\eta>0$ tel que $|x|<\eta$ entraîne que $|f(x)|<\varepsilon$. Puisque $1+(nx)^2\geq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a donc $|f_n(x)|\leq\varepsilon$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ dès que $|x|<\eta$. Supposons maintenant que $|x|\geq\eta$. Alors $1+(nx)^2\geq 1+n^2\eta^2$ et donc

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{1+(1+n^2\eta^2)}.$$

Il existe un entier n_0 tel que, pour $n\geq n_0$, on a,

$$\frac{1}{1+(1+n^2\eta^2)}\leq\varepsilon.$$

Ainsi, si $n \geq n_0$ et si $|x| \geq \eta$,
$$|f_n(x)| \leq \varepsilon.$$
Dans tous les cas, on a bien prouvé que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq n_0$, on a $|f_n(x)| \leq \varepsilon$. C'est bien que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Correction.

1. Par convergence uniforme de (P_n) vers f sur $\mathbb{R}$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|P_n - f\|_\infty \leq 1/2$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, on en déduit
$$\|P_n - P_N\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_N\|_\infty \leq 1.$$
2. $P_n - P_N$ est un polynôme borné sur $\mathbb{R}$, il s'agit donc d'un polynôme constant.
3. On peut donc écrire, pour tout $n \geq N$, $P_n = P_N + C_n$. On a donc, par exemple pour $x = 0$,
$$P_n(0) = P_N(0) + C_n \to f(0)$$
et donc (C_n) est une suite convergente. Notons λ sa limite. Ainsi,(P_n) converge simplement (et en fait aussi uniformément) vers $P_N + \lambda$. Par unicité de la limite, $f = P_N + \lambda$ est une fonction polynomiale.

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a < b$ deux réels. Pour $x \in [a, b]$, on pose
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a, b]$.
2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Correction.

1. On reconnait dans $f_n(x)$ une somme de Riemann pour f sur l'intervalle $[x, x+1]$, avec pas de $1/n$. Puisque f est continue, $(f_n(x))$ converge vers $\int_x^{x+1} f(t)dt$ pour tout $x \in [a, b]$ (et en fait, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

2. Soit $x \in [a,b]$. On a

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| &\leq \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)dt\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} \left|f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)\right| dt.\end{aligned}$$

Fixons ensuite $\varepsilon > 0$. On va utiliser l'uniforme continuité de f pour majorer ce qu'il y a à l'intérieur de l'intervalle. Remarquons que $x+\frac{i}{n}$ et t sont dans l'intervalle $[x, x+1] \subset [a, b+1]$. Par le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur le segment $[a, b+1]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tous $u, v \in [a, b+1]$,

$$|u - v| < \eta \implies |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Soit N tel que $\frac{1}{N} < \eta$. Pour $n \geq N$, pour $x \in [a,b]$, pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et pour $t \in \left[x+\frac{i}{n}, x+\frac{i+1}{n}\right]$, on a

$$\left|t - \frac{i}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \eta.$$

On en déduit que

$$\left|f\left(x+\frac{i}{n}\right) - f(t)\right| < \varepsilon.$$

Finalement, il vient, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [a,b]$,

$$\left|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} \varepsilon = \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite (f_n) sur l'intervalle $[a,b]$.

Exercice 18.

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
   (b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
   (c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i. la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
      ii. la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Correction.

1. (a) Pour 0, $f_n(0) = 0$ et la suite converge. Pour $x > 0$, la suite $(g(x)e^{-nx})$ tend vers 0. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers 0.
   (b) Notons M un majorant de $|g|$. Pour $x > a$, on a $|f_n(x)| \leq Me^{-nx} \leq Me^{-na}$, suite qui tend vers 0 indépendamment de x. Ceci prouve la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
   (c) Par continuité de g en 0, et puisque $g(0) = 0$, il existe $a > 0$ tel que $|g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in [0, a]$. Il vient $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$. De plus, ce a étant fixé, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$. On peut donc trouver N tel que, pour $n \geq N$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon$. Résumons. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a
   $$|f_n(x)| \leq \varepsilon$$
   (le a n'apparait plus, il sert uniquement dans la preuve.) C'est bien que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) L'étude se fait suivant le même principe. Pour $x = 0$, le terme général est nul, et pour $x > 0$, il s'agit du terme général d'une suite géométrique de raison de module inférieur strict à 1. On a bien convergence de $\sum_n f_n(x)$. De plus, si $x \in [a, +\infty[$, on a
   $$|f_n(x)| \leq Me^{-na},$$
   qui est le terme général d'une série numérique convergente. C'est bien que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$.
   (b) Considérons le reste de rang n de la série : pour $x > 0$,
   $$R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} f_k(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-x}} e^{-(n+1)x}.$$
   Si la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine, c'est que $g(x)/x$ tend vers 0. Posons alors pour $x > 0$ $g_1(x) = \frac{g(x)}{1-e^{-x}}$. Puisque $1 - e^{-x} \sim_0 x$, on peut prolonger g_1 par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$. Ceci définit une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$ et continue en 0. On se retrouve dans la situation de la question (1), et on a bien convergence uniforme du reste vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ou encore convergence uniforme de la série sur cet intervalle. Réciproquement supposons que $g(x)/x$ ne tend pas vers 0. Alors, g_1 non plus ne tend pas vers 0 en 0 et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que
   $$\forall \eta > 0,\ \exists x \in]0, \eta[\text{ tel que } |g_1(x)| > \varepsilon.$$
   En prenant des nombres η de la forme $\eta = 1/n$, on obtient pour chaque $n \geq 0$ un réel x_n tel que
   $$0 < x_n < \frac{1}{n} \text{ et } |g_1(x_n)| > \varepsilon.$$
   Mais alors,
   $$R_n(x_n) \geq \varepsilon e^{-(n+1)x_n} \geq \varepsilon e^{-(n+1)/n} \geq e^{-1}\varepsilon/2$$
   dès que n est assez grand. Ceci nie la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19.

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer S'.

Correction.

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. La série définissant S converge d'après le critère des séries alternées. De plus, notant $R_n(x)$ le reste de la série, le critère des séries alternées donne également

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

Fixons maintenant $a > 0$. Alors, pour tout $x \geq a$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

Ainsi, la suite $(|R_n(x)|)$ est majorée pour $x \in [a, \infty[$ par la suite $\left(\frac{1}{1+(n+1)a}\right)$, qui ne dépend pas de x, et qui tend vers 0. Ceci prouve la convergence uniforme de la série sur l'intervalle $[a, \infty[$. Comme chaque fonction est continue sur $[a, +\infty[$, il en est de même de S. Puisque $a > 0$ est arbitraire, S est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Puisque la convergence est uniforme sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion limite/séries et on a

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n \geq 0} u_n(x) = \sum_{n \geq 0} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 1.$$

On pouvait également appliquer le critère des séries alternées, et encadrer la somme par les deux premières sommes partielles. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{1+x} \leq S(x) \leq 1.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des gendarmes.

3. La fonction S converge simplement sur $]0, +\infty[$. Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur ce même intervalle, avec

$$u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}.$$

On fixe $a > 0$ et on va démontrer la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n'(x)$ sur $[a, +\infty[$ en appliquant le critère des séries alternées. Soit $x \geq a$. On a après réduction au même dénominateur et simplification

$$|u_n'(x)| - |u_{n+1}'(x)| = \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2(1+(n+1)x)^2}.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on ait

$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0.$$

Alors $n(n+1)x^2 - 1 \geq 0$ et donc la série de terme général $u_n'(x)$ converge d'après le critère des séries alternées. De plus, si on note T_n le reste de la série $\sum_n u_n'$, alors on a

$$|T_n(x)| \leq \frac{1}{(1+(n+1)x)^2} \leq \frac{1}{(1+(n+1)a)^2}.$$

On conclut à la convergence uniforme comme à la première question. Donc, par les théorèmes généraux, S est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Comme $a > 0$ est arbitraire, S est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est donnée par $S'(x) = \sum_{n \geq 0} u_n'(x)$.

Exercice 20.

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a
$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$
En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe réprésentative de ζ.

Correction.

1. La série définissant $\zeta(s)$ est une série de Riemann. Elle est convergente si et seulement si $s > 1$. De plus, pour chaque $n \geq 1$, les fonctions $s \mapsto n^{-s}$ sont décroissantes, et même strictement décroissantes pour $n \geq 2$. Pour $1 < s < t$, on a donc
$$1 + 2^{-s} > 1 + 2^{-t} \text{ et } \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^t}$$
(la deuxième inégalité n'est qu'une inégalité large car on passe à la limite). Ajoutant les deux inégalités, on en déduit que
$$\zeta(s) > \zeta(t),$$
ce qui prouve que ζ est décroissante.

2. Chaque fonction $s \mapsto n^{-s}$ est continue sur son domaine de définition. Il suffit de démontrer que la série de fonctions converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$, avec $a > 1$, pour prouver que la fonction est continue sur $]1, +\infty[$. Or, pour tout $s \in [a, +\infty[$, on a
$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^a},$$
et le terme de droite est le terme général d'une série numérique convergente. Ceci prouve la convergence normale de f sur $[a, +\infty[$.
3. Puisque la série définissant ζ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites, et on obtient
$$\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{n^s} = 1.$$
4. Pour $x \in [k, k+1]$, on a
$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$
En intégrant cette inégalité entre k et $k+1$, on trouve
$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$
On somme maintenant ces deux inégalités pour k allant de 1 à $+\infty$. On obtient
$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} \leq \zeta(s).$$
Or,
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$
On obtient finalement :
$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$
ou encore
$$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + (s-1).$$
Par le théorème des gendarmes, $(s-1)\zeta(s)$ tend vers 1 lorsque s tend vers 1. C'est bien que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$. En particulier, $\lim_{s\to 1} \zeta(s) = +\infty$.
5. On va démontrer que ζ est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$ et prouver que $\zeta''(s) \geq 0$ pour tout $s > 1$. Pour prouver que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$, on prouve que la série dérivée converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 1$. Notons $f_n(s) = n^{-s}$, $n \geq 1$ et $s > 1$. Alors $f_n'(s) = (-\ln n)n^{-s}$. Pour $s \in [a, +\infty[$, on a
$$|f_n'(s)| \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$
Or, le terme apparaissant à gauche est le terme général d'une série numérique convergente. En effet, pour $b \in]1, a[$, on a
$$n^b \frac{\ln n}{n^a} \to 0 \text{ et donc } \frac{\ln n}{n^a} = o(n^{-b}).$$

Comme $\sum_{n\geq 1} n^{-b}$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^a}$. Par théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que ζ est C^1 sur tout intervalle $[a,+\infty[$, donc sur $]1,+\infty[$, et que sa dérivée ζ' vérifie

$$\zeta'(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{-\ln n}{n^s}.$$

De même, on prouve que ζ est de classe C^2 et que

$$\zeta''(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

Comme tous les termes apparaissant dans la série sont positifs, on en déduit que ζ'' est positive. En particulier, ζ est convexe.

6.

Exercice 21.

Pour $x\geq 0$ et $n\geq 1$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.
2. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0,M]$ pour tout $M>0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit $n\geq 1$ et $x_0\geq n\geq 1$. Montrer que $f(x_0)\geq \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Correction.

1. Le réel x étant fixé dans $\mathbb{R}_+$, $f_n(x)\sim_{+\infty}\frac{x}{n^{3/2}}$ si $x\neq 0$, et $f_n(0)=0$. Ceci prouve la convergence de $\sum_n f_n(x)$.
2. Pour $x\in[0,M]$, on a
$$0\leq f_n(x)\leq \frac{M}{\sqrt{n}(0+n)}=\frac{M}{n\sqrt{n}}.$$
Le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. On a donc prouvé la convergence normale de $\sum_n f_n$ sur $[0,M]$. La convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}$. En effet, on a
$$\|f_n\|_\infty\geq f_n(n)=\frac{n}{\sqrt{n}(n+n)}=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$
et $\sum_n \|f_n\|_\infty$ est divergente.

3. La série de fonctions convergeant normalement, donc uniformément, sur tout intervalle $[0, M]$, et chaque fonction f_n étant continue, la somme f est continue sur tout intervalle $[0, M]$, donc sur $\mathbb{R}$. Pour montrer la dérivabilité sur $\mathbb{R}$, on va s'intéresser à la série des dérivées $\sum_n f_n'$. En effet, chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et un calcul simple prouve que
$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}.$$
On va prouver la convergence normale de $\sum_n f_n'$ sur tout $[0, +\infty[$. On a en effet, pour $x \geq 0$,
$$0 \leq f_n'(x) \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$
Le membre de droite est une série numérique convergente, $\sum_n f_n'$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ et donc f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ avec $f'(x) = \sum_n f_n'(x) \geq 0$ puisque chaque f_n' est positive. Ainsi, f est croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Si $x_0 \geq n \geq 1$, alors
$$f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0}{\sqrt{k}(x_0+n)}.$$
Puisque $2x_0 \geq x_0 + n$, on a
$$\frac{x_0}{x_0+n} \geq \frac{1}{2}$$
et on trouver bien que
$$f(x_0) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$
(on pouvait aussi démontrer cette propriété en utilisant la croissance de f et plus particulièrement l'inégalité $f(x_0) \geq f(n)$). Déduisons en que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$. Fixons $A > 0$. La série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ étant positive et divergente, on peut trouver un entier $n > 0$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq A$. Pour tout $x \geq n$, on a
$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq A.$$
Ceci implique que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
5. On sait que
$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(x+n)}.$$
De plus, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}(x+n)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour tout $x \geq 0$, on a
$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}(x+n)}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$
terme général d'une série convergente. De plus,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+x)} = 0.$$
D'après le théorème d'interversion des limites,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sum_{n\geq 1} 0 = 0.$$

Exercice 22.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
5. Justifier que S admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier N, on a
$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} S(x)$.

Correction.

1. Remarquons d'abord que s'il existe $n \geq 1$ de sorte que $x = -\frac{1}{n}$, alors $u_n(x)$ n'est pas définie. On considère donc $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas égal à l'un des $-\frac{1}{n}$. Si $x = 0$, alors $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$, et donc la série est divergente. Si $x \neq 0$, alors $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2x}$ et donc la série est convergente. On en déduit que la série converge simplement sur $\mathbb{R}^*\backslash\{-\frac{1}{n};\ n \geq 1\}$.
2. On va démontrer la convergence normale de la série de fonctions sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Chaque u_n étant continue, ceci démontrera que S est continue sur $[a, +\infty[$. Puisque $a > 0$ est arbitraire, ceci prouvera la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, pour $x \geq a$, on a
$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n+n^2a}.$$
Or, $\frac{1}{n+n^2a}$ est le terme général d'une série numérique convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. Chaque u_n étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est de même de la somme S. On aurait pu aussi démontrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et étudier le signe de la dérivée.
4. Par convergence normale, donc uniforme, sur $[1, \infty[$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0.$$
5. Puisque S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, S admet une limite en 0. Pour $x > 0$, on a
$$S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x}.$$
On passe à la limite, et on obtient
$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
Fixons maintenant $A > 0$. Par divergence de la série de terme général $\frac{1}{n}$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ de sorte que
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq A.$$

On a donc
$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq A.$$
Puisque A est arbitraire, il vient $\lim_{x\to 0} S(x) = +\infty$.

Exercice 23.

Soit la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que S définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que
$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2}dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{x}{x^2+t^2}dt.$$
3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Correction.

1. Remarquons d'abord que la série est convergente quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $u_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$ et fixons $M > 0$. Alors, pour tout $x \in [-M, M]$, on a
$$|u_n(x)| \leq \frac{M}{n^2},$$
et le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. On en déduit que la série de fonctions $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-M, M]$. Puisque chaque fonction $x \mapsto u_n(x)$ est continue, on en déduit que S est continue sur $[-M, M]$. Comme $M > 0$ est arbitraire, on en déduit finalement que S est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2+t^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty]$. En particulier, pour tout $t \in [n, n+1]$, on a
$$\frac{x}{t^2+x^2} \leq \frac{x}{n^2+x^2}.$$
Intégrer cette inégalité entre n et $n+1$ donne la partie droite de l'inégalité précédente. Pour l'autre partie, on part de
$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{t^2+x^2} \text{ pour tout } t \in [n-1, n],$$
et on intègre cette inégalité entre $n-1$ et n.
3. Sommons les inégalités précédentes pour n allant de 1 à $+\infty$. On trouve :
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}dt.$$
Mais on peut calculer les intégrales, et on trouve que
$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\arctan(1/x) \leq S(x) \leq \pi/2.$$
Si on fait tendre x vers $+\infty$, on trouve par le théorème des gendarmes que $S(x)$ tend vers $\pi/2$.

Exercice 24.

Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

1. Montrer que S est définie et continue sur I.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
5. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Correction.

1. Posons, pour $x \in I$, $u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$. On a, pour $x > -1$ fixé, $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{x}{n^2}$ et donc la série $\sum_n u_n(x)$ est convergente. Pour prouver la continuité de S sur I, fixons $-1 < a < b$ et prouvons la convergence normale sur $[a, b]$. On a en effet, pour tout $x \in [a, b]$,
$$|u_n(x)| \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}.$$
Le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente, et donc la série converge normalement sur $[a, b]$.
2. Il est facile de vérifier (par exemple en les dérivant) que toutes les fonctions u_n sont croissantes. Donc S est croissante.
3. On a
$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$
4. On remarque que $S(0) = 0$. Par continuité de S en 0, $S(x+1) \to 0$ si $x \to -1^+$. On a donc
$$S(x) = S(x+1) - \frac{1}{x+1} \sim_{-1^+} \frac{-1}{x+1}.$$
5. D'après la troisième question, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S(n+1) - S(n) = \frac{1}{n+1}.$$
Sachant que $S(0) = 0$, une récurrence immédiate établit immédiatement le résultat voulu.

6. On a, par croissance de la fonction S, pour tout $x>0$,

$$S([x])\leq S(x)\leq S([x]+1)$$

soit

$$\frac{\ln x}{\ln[x]}\times\frac{\ln S([x])}{\ln[x]}\leq\frac{S(x)}{\ln x}\leq\frac{\ln x}{\ln[x]}\times\frac{\ln S([x+1])}{\ln[x]}.$$

On montre facilement que les membres de gauche et de droite de cette inégalité tendent vers 1, notamment parce que $\ln(x)/\ln([x])$ tend vers 1 si x tend vers $+\infty$. C'est donc que

$$S(x)\sim_{+\infty}\ln(x).$$

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 25.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ \text{ pour } x\in[0,n],\ \text{ et 0 ailleurs.}$$

Correction.

Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Il existe un n_0 tel que pour $n\geq n_0$, $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)$. Maintenant,

$$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)=-\frac{x}{n}+o\left(\frac{x}{n}\right).$$

On a donc

$$f_n(x)=e^{-x+o(x)},$$

ce qui prouve que (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x)=e^{-x}$. On pose alors $\varphi_n(x)=f_n(x)-f(x)$. φ_n est dérivable sur $[0,n]$, et sa dérivée vaut :

$$\varphi_n'(x)=-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}+e^{-x}.$$

Malheureusement, cette fonction n'est pas très facile non plus à étudier. On note x_0 un point où la dérivée s'annule. Essayons de majorer $|\varphi_n(x_0)|$:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x_0)&=\left(1-\frac{x_0}{n}\right)^n-e^{-x_0}\\&=\left(1-\frac{x_0}{n}\right)\left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n-1}-e^{-x_0}\\&=-e^{-x_0}\frac{x_0}{n}.\end{aligned}$$

Posons $g_n(x)=e^{-x}\frac{x}{n}$. Sur $[0,n]$, la borne supérieure de $|\varphi_n(x)|$ est atteinte ou a une borne de l'intervalle, ou en un point où la dérivée s'annule. Sur $[n,+\infty[$, on constate facilement que c'est en n. On a donc :

$$\|\varphi_n\|_\infty\leq\max\left(e^{-n},\max_{x\in[0,n]}|g_n(x)|\right).$$

On s'est donc ramené à l'étude d'une fonction plus facile à manipuler. En effet,

$$g_n'(x) = 0 \iff \frac{e^{-x}}{n}(1-x) = 0 \iff x = 1.$$

Ceci prouve que

$$\sup_{x\in[0,n]} |g_n(x)| \leq \max\left(e^{-n}, \frac{e^{-1}}{n}\right).$$

Bref, on a :

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{en}.$$

La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Exercice 26.

On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

3. En déduire que la convergence est uniforme sur I.

Correction.

1. Fixons $x \in I$ et posons, pour $t \in I$, $\phi(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$, de sorte que $f_{n+1}(x) = \phi(f_n(x))$. Posons, pour simplifier les notations, $u_n = f_n(x)$. On doit étudier la suite récurrente $u_{n+1} = \phi(u_n)$, avec $u_0 = 0$. Remarquons que $\phi'(t) = 1 - t \geq 0$ et donc ϕ est croissante sur I. On a de plus $\phi(I) = [\phi(0), \phi(1)] = [x/2, (x+1)/2]$ et donc $\phi(I) \subset I$. Ainsi, (u_n) est à valeurs dans I. De plus, $u_1 \geq u_0$ et donc la suite (u_n) est croissante. Ainsi, la suite est croissante, majorée donc elle converge. Sa limite l vérifie $\phi(l) = l$ soit immédiatement $l = \sqrt{x}$.
2. D'après la question précédente, on sait que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a $f_n(x) \leq \sqrt{x}$ (la suite est croissante). On en déduit que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - f_n(x) - (x - f_n(x)^2)/2 \\ &= \left(\sqrt{x} - f_n(x)\right)\left(1 - (\sqrt{x} + f_n(x))/2\right) \\ &\leq \left(\sqrt{x} - f_n(x)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \end{aligned}$$

   Par récurrence immédiate, on obtient

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq (\sqrt{x} - f_0(x))\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n,$$

   ce qui est le résultat demandé.

3. Si on étudie la fonction $g : t \mapsto t(1-t/2)^n$ sur $[0,1]$, on vérifie qu'elle atteint son maximum en $t_n = 2/(n+1)$. On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq g(\sqrt{x}) \leq g(t_n) \leq \frac{2}{n+1}.$$

On a majoré $|\sqrt{x} - f_n(x)|$ par une quantité indépendante de x et qui tend vers 0. Ceci prouve la convergence uniforme de la suite sur $[0,1]$.

Exercice 27.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ et on note f sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
3. On fixe $A > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que
   $$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$
   (b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0,\delta[$,
   $$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)} \leq -A+1.$$
   (c) Démontrer que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Correction.

1. Pour $t < 0$, $\frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ ne tend pas vers 0. La série diverge donc grossièrement. Pour $t \geq 0$, on a l'inégalité suivante :
$$0 \leq \frac{e^{-nt}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}.$$
Comme le terme de droite est le terme général d'une série convergente, la série $\sum_n \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ est convergente. Donc le domaine de définition de f est $[0,+\infty[$.
2. L'inégalité précédente prouve en fait que la série de fonctions est normalement convergente sur $[0,+\infty[$. Chaque fonction $t \mapsto \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ étant continue, f est elle-même continue. On va maintenant étudier la convergence normale des séries dérivées. Fixons $a > 0$ et posons $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$. Alors, pour $k \geq 1$, on a
$$f_n^{(k)}(t) = (-1)^k n^k \frac{e^{-nt}}{1+n^2}.$$

En particulier, pour $t \geq a$, on a

$$\left|f_n^{(k)}(t)\right| \leq n^k \frac{e^{-na}}{1+n^2}.$$

Or, le terme apparaissant à droite est le terme général d'une série convergente, puisque $a > 0$ et donc

$$n^k \frac{e^{-na}}{1+n^2} = o(n^{-2}).$$

Ainsi, chaque série $\sum_n f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Ceci prouve que f est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$. Comme $a > 0$ est arbitraire, la fonction est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3. (a) Puisque $\frac{n}{1+n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n^2}$ est divergente, et la suite de ces sommes partielles tend vers $+\infty$. On en déduit l'existence de $N \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2} \geq N.$$

(b) Lorsque h tend vers 0, la quantité $\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}$ converge vers $\sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{1+n^2} \leq -A$. En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta[$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

(c) Le taux de variation de f en 0 est égal à

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}.$$

Puisque, pour tout $n \geq 1$, $e^{-nh} \leq 1$, on en déduit que

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on peut trouver $\delta < 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \delta[$, on a

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \leq -A + 1.$$

Ceci est la définition de $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -\infty$. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

4. Puisque la série définissant f converge normalement sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites. On en déduit

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2} = \sum_{n\geq 1} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2} = 0.$$

Exercice 28.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(t) = \dfrac{1}{n}\, t^n \sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. Soit $a \in]0,1[$.
   (a) Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
   (b) En déduire que la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que, pour $x \in]-1,1[$,
   $$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1 - 2x\cos x + x^2}.$$
   (c) Montrer que $f(t) = \arctan \dfrac{t\,\sin t}{1 - t\,\cos t}$ pour $t \in]-1,1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$, $A_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^k \sin k\,t$.
   (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$ on ait $|A_n(t)| \leqslant M$.
   (b) Montrer en écrivant $t^k \sin(k\,t) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \sin k\,t}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$
   (c) En déduire que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.
   (d) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$.

Correction.

1. Pour $x \in]-1,1[$ fixé, on a
   $$|f_n(x)| \le \frac{x^n}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
   et donc la série (numérique) $\sum_n f_n(x)$ converge (absolument) pour tout $x \in]-1,1[$. Autrement dit, la série (de fonctions) $\sum_n f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. (a) On commence par calculer f_n' :
   $$f_n'(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx).$$
   Pour tout $x \in [-a,a]$, on a
   $$|f_n'(x)| \le 2a^{n-1},$$
   qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum_n f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
   (b) $\sum_n f_n$ converge simplement vers f sur $]-1,1[$, chaque f_n est C^1 et $\sum_n f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-a,a]$. Ainsi, f est C^1 sur $[-a,a]$ avec $f' =$

$\sum_n f_n'$. Comme a est arbitraire dans $]0,1[$, f est C^1 sur $]-1,1[$, de dérivée $f'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$. En fait, on peut effectivement calculer f'. En effet, pour $x \in]-1,1[$, puisque $xe^{ix} \neq 1$,

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1} \Im m\left(\left(xe^i x\right)^n\right) + \sum_{n\geq 1} \Re e\left(\left(xe^{ix}\right)^n\right) \\
&= \Im m\left(\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix}}{1-e^{ix}}\right) \\
&= \Im m\left(\frac{e^{ix}(1-xe^{-ix})}{(1-xe^{ix})(1-xe^{-ix})}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix}(1-xe^{-ix})}{(1-xe^{ix})(1-xe^{-ix})}\right) \\
&= \Im m\left(\frac{e^i x - x}{1-2x\cos x + x^2}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix} - x^2}{1-2x\cos x + x^2}\right) \\
&= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1-2x\cos x + x^2}.
\end{aligned}$$

(c) Posons $g(t) = \arctan \dfrac{t\,\sin t}{1-t\,\cos t}$. Un calcul facile (mais fastidieux !) prouve que $g'(t) = f'(t)$ pour tout $t \in]-1,1[$. De plus, $g(0) = f(0) = 0$. C'est bien que $f = g$ sur $]-1,1[$.

3. (a) On calcule cette somme de la même façon qu'à la question précédente :

$$A_n(t) = \Im m\left(\frac{te^{it} - t^{n+1}e^{i(n+1)t}}{1-te^{it}}\right).$$

Or, $|te^{it} - t^{n+1}e^{i(n+1)t}| \leq 2$ pour $t \in [-1,1]$, et $1 - te^{it}$ est une fonction continue qui ne s'annule pas sur $[-1,1]$. Elle est donc minorée par une constante $a > 0$, et donc

$$|A_n(t)| \leq \frac{2}{a}.$$

(b) C'est un calcul direct en faisant un changement d'indices dans la somme.

(c) La seule nouveauté est la convergence en 1 et en -1, mais on traite tout $[-1,1]$. On a d'une part, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\frac{A_n(t)}{n} \to 0.$$

D'autre part, puisque

$$\left|\frac{A_k(t)}{k(k+1)}\right| \leq \frac{M}{k}^2,$$

la série $\sum_k \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ converge (absolument). Ceci signifie que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}\right)_n$ admet une limite. De l'écriture obtenue à la question précédente, on déduit que la somme $\sum_{k=1}^n f_k(t)$ converge et que

$$f(t) = \sum_{k\geq 1} f_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}.$$

Or, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ converge normalement sur l'intervalle $[-1,1]$, puisque

$$\frac{|A_k(t)|}{k(k+1)} \leq \frac{M}{k(k+1)}.$$

Chaque terme $t \mapsto \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$ étant continue, f est elle-même continue sur $[-1,1]$.

(d) Prenons l'égalité

$$f(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$$

valable pour $t \in]-1, 1[$. On fait tendre t vers 1 dans les deux membres. Comme on a deux fonctions continues, on obtient

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \arctan\left(\frac{\sin 1}{1 - \cos 1}\right).$$

On peut simplifier ce résultat à l'aide des formules de trigonométrie pour obtenir que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Exercice 29.

On considère la fonction $\mu(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Quel est le domaine de définition de μ ?
2. Montrer que μ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
3. Démontrer que μ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.
4. On souhaite démontrer que μ admet une limite en 0.
   (a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a

   $$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right).$$

   (b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

   $$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

   (c) Conclure.

Correction.

1. Si $x \leq 0$, la série diverge grossièrement, et si $x > 0$, elle vérifie le critère des séries alternées et donc elle est convergente.
2. Posons $v_n(x) = \frac{1}{n^x}$ de sorte que $\mu(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} v_n(x)$. Fixons $a > 0$. Puisque chaque fonction v_n est de classe C^∞, il suffit de prouver que, pour chaque $p \geq 0$, la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. On a

   $$v_n^{(p)}(x) = (-1)^p (\ln n)^p n^{-x}.$$

   On souhaite appliquer le critère des séries alternées à $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} v_n(x)$ mais il faut vérifier que la valeur absolue du terme général est bien décroissante. Pour cela, on introduit

$h(t) = (\ln t)^p t^{-x}$. Alors h est dérivable et $h'(t) = (\ln t)^{p-1} t^{-x-1}(p - \ln x)$. Lorsque n est supérieur à $\exp(p/x)$, on a $h(n+1) \leq h(n)$ et donc la série vérifie bien le critère des séries alternées. En particulier, pour tout $x \in [a, +\infty[$, pour tout $n \geq \exp(p/a)$ (remarquons que ce terme ne dépend pas du x choisi dans $[a, +\infty[$), on a par le critère des séries alternées

$$|R_n(x)| \leq \ln^p(n+1)^{-x} \leq \ln^p(n+1)(n+1)^{-a},$$

où $R_n(x)$ désigne le reste de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$. Le reste est donc majorée indépendamment de $x \in [a, +\infty[$ par une suite qui tend vers 0. La série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$ est donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ pour $p \geq 0$, ce qui prouve que μ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\mu^{(p)}(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$.

3. Puisque la série définissant μ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites. Or, pour chaque $N \geq 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = 1$$

(le premier terme de cette somme finie est constant égal à 1, les autres termes tendent vers 0). On en déduit que μ tend vers 1 en $+\infty$.

4. (a) C'est un calcul simple si on remarque que $\mu(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x}$.

   (b) Fixons $x > 0$. Alors la suite $n \mapsto \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ tend vers 0 et est décroissante (par exemple, en utilisant le théorème des accroissements finis ou en étudiant la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^x} - \frac{1}{(u+1)^x}$). En particulier, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)$ vérifie le critère des séries alternées. Sa somme est donc du signe de son premier terme, ici positif, et est majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme, ici $1 - 1/2^x$. On trouve bien que

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

   (c) Il suffit d'écrire que

$$\frac{1}{2} \leq \mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^{x+1}}$$

   et d'appliquer le théorème des gendarmes.