

## Corrigé de la feuille d'exercices n°16

**1. Exercices basiques****Exercice 1.**

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence  $\pi$ .
2. Est-il possible de trouver des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $a_n = o(b_n)$  et pourtant  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n b_n z^n$  ont le même rayon de convergence ?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n z^n$  ?

**Correction.**

1. La série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\pi^n}$  convient.
2. Si  $a_n = \frac{1}{n+1}$  et  $b_n = 1$ , les deux séries ont même rayon de convergence (égal à 1), et pourtant  $a_n = o(b_n)$ .
3. C'est le même ! on a  $|a_n \rho^n| = |(-1)^n a_n \rho^n|$  pour tout  $\rho \geq 0$ , et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

**Exercice 2.**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
2.  $\sum_n \frac{n!}{(2n)!} x^n$
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}} x^n$
4.  $\sum_n (\ln n) x^n$
5.  $\sum_n \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{2^{n+1}}$
6.  $\sum_n (2 + ni) z^n$
7.  $\sum_n \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} z^n$

**Correction.**

1. Posons  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

et donc le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

2. Posons  $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$ . Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4n+2} \rightarrow 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est  $+\infty$ .

3. On applique la règle de d'Alembert en remarquant que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \rightarrow \frac{1}{8},$$

où on a posé  $a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$ . Le rayon de convergence de la série est donc égal à 8.

4. On sait que  $(\ln n R^n)$  est borné si et seulement si  $|R| < 1$ . Ainsi, le rayon de convergence vaut 1. Ceci peut se retrouver par la règle de d'Alembert, puisque

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \rightarrow 1.$$

5. Pour  $R > 0$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}R^{2n}}{2^n + 1} \sim_{+\infty} \sqrt{n} \left(\frac{R^2}{2}\right)^n.$$

Ceci est borné si et seulement si  $\frac{R^2}{2} < 1$ . Le rayon de convergence est donc  $\sqrt{2}$ . On peut là encore donner une preuve en utilisant la règle de d'Alembert.

6. On remarque que

$$(n-2)|z|^n \leq |2+ni||z^n| \leq (2+n)|z|^n.$$

Ainsi, la série converge pour  $|z| < 1$  et diverge pour  $|z| > 1$ . Son rayon de convergence est donc 1.

7. Notant  $u_n = \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} z^n$ , on applique la règle de d'Alembert pour étudier la convergence absolue de cette série. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{2n+1} \rightarrow 0.$$

La série entière est donc convergente pour toute valeur de  $z$ . Son rayon de convergence est donc  $+\infty$ .

### Exercice 3.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1.  $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n \cdot 2^n}$
2.  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) x^n$
3.  $\sum_{n \geq 1} (\exp(1/n) - 1) x^n$
4.  $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n$ ,  $a > 0$
5.  $\sum_n z^{n!}$
6.  $\sum_n n^{\ln n} z^n$

### Correction.

On notera pour chaque exemple  $a_n x^n$  le terme général de la série.

1. Posons  $u_n = \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n \cdot 2^n}$ . Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n|1+i||z|^3}{2(n+1)} \rightarrow \frac{\sqrt{2}|z|^3}{2} = \frac{|z|^3}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, si  $|z|^3 < \sqrt{2}$ , la série de terme général  $|u_n|$  est convergente d'après le critère de

d'Alembert, alors qu'elle est divergente si  $|z|^3 > \sqrt{2}$ . On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est  $\sqrt[3]{2}$ .

2. En effectuant un développement limité, on trouve que  $a_n \sim \frac{1}{n}$  d'où  $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$ . La suite  $(|a_n z^n|)$  est donc bornée si et seulement si  $|z| \leq 1$ . Le rayon de convergence de la série est 1.
3. On a  $a_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ , donc  $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$  et la suite  $(|a_n z^n|)$  est bornée si et seulement si  $|z| < 1$ . Le rayon de convergence de la série est donc égal à 1.
4. On applique à nouveau la règle de d'Alembert à  $u_n = a^{\sqrt{n}} |z|^n$ . On obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |z| a^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Or,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left( (1 + 1/n)^{1/2} - 1 \right) = \sqrt{n} \left( 1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \rightarrow 0.$$

Ainsi, on obtient que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow |z| a^0 = |z|.$$

On en déduit que la série des modules converge absolument pour  $|z| < 1$  et diverge pour  $|z| > 1$ . Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.

5. Pour  $|z| < 1$ , on remarque que  $|z|^{n!} \leq |z|^n$  et donc la série est convergente. Pour  $|z| \geq 1$ , le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.
6. Pour  $u_n = n^{\ln n} |z|^n$ , on étudie la convergence en appliquant la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{\ln n/n} |z| = \exp\left(\frac{(\ln n \times \ln n)/n}{1}\right) |z| \rightarrow |z|.$$

La série est donc convergente pour  $|z| < 1$  et divergente pour  $|z| > 1$ . Son rayon de convergence vaut 1.

#### Exercice 4.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  où  $(a_n)$  est la suite déterminée par  $a_0 = \alpha$ ,  $a_1 = \beta$  et  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Correction.

C'est plus un exercice de révision sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 que sur les séries entières. On peut en effet déterminer l'expression de  $a_n$ , en introduisant l'équation caractéristique  $r^2 = 2r - 1$ , donc 1 est racine double. Il existe donc  $\lambda, \mu$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_n = \lambda + \mu n$$

Utilisant la valeur de  $a_0$  et  $a_1$ , on obtient alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \alpha + (\beta - \alpha) \cdot n.$$

Ainsi, si  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , le rayon de convergence vaut 1. Sinon, il vaut  $+\infty$ .

**Exercice 5.**

Soit  $\sum_n a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho > 0$ . Montrer que  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ .

**Correction.**

Soit  $0 < r < \rho$ . Par le lemme d'Abel, on sait que la suite  $(a_n r^n)_n$  est bornée. Autrement dit, il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$|a_n r^n| \leq M.$$

Soit maintenant  $R > 0$ . Alors on a

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} = |a_n| r^n \times \frac{(R/r)^n}{n!}.$$

Par croissance comparée des suites puissances et factorielle, il existe  $C > 0$  tel que  $|(R/r)^n|/n! \leq C$ . Il vient, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} \leq MC.$$

La suite  $(a_n R^n)$  est bornée pour tout  $n$ , donc le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  vaut  $+\infty$ .

**Exercice 6.**

Soit  $\sum_n a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho \in [0, +\infty]$ , telle que  $a_n > 0$  pour tout entier  $n$  et soit  $\alpha > 0$ . Quel est le rayon de convergence de la série  $\sum_n a_n^\alpha x^n$  ?

**Correction.**

Il suffit de remarquer que la suite  $(a_n^\alpha r^n)$  est bornée si et seulement si la suite  $(a_n r^{n/\alpha})$  (obtenue en prenant la puissance  $1/\alpha$  de la première) est bornée. Ainsi, si  $r < \rho^\alpha$ , alors  $r^{1/\alpha} < \rho$  et donc les suites  $(a_n r^{n/\alpha})$  et  $(a_n^\alpha r^n)$  sont bornées. De même, si  $r > \rho^\alpha$ , de sorte que  $r^{1/\alpha} > \rho$ , alors les suites  $(a_n r^{n/\alpha})$  et  $(a_n^\alpha r^n)$  ne sont pas bornées. Ceci prouve que le rayon de convergence de la série  $\sum_n a_n^\alpha x^n$  est égal à  $\rho^\alpha$ .

**Exercice 7.**

Soit  $S$  la somme de la série entière  $\sum_n a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ . Démontrer que  $S$  est paire si et seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2k+1} = 0$ .

**Correction.**

Supposons d'abord que  $a_{2k+1} = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $S$  est paire comme somme d'une série de fonctions paires. Réciproquement, supposons que  $S$  est paire, et posons  $T(x) = S(-x)$ . Alors,

on sait que, pour tout  $x \in ]-R, R[$ , on a

$$T(-x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n.$$

De plus, puisque  $S$  est paire,  $T$  et  $S$  coïncident sur  $] -R, R[$ . C'est donc que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_n = (-1)^n a_n$ . Ceci impose que  $a_n = 0$  dès que  $n$  est impair.

### Exercice 8.

Soit  $S$  une série entière de rayon de convergence non nul. On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $S(x) = 0$ . Justifier que  $S$  est identiquement nulle.

#### Correction.

Notons  $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Alors on sait que  $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ . Mais,  $S$  est identiquement nulle sur l'intervalle  $] -\alpha, \alpha[$ . Il en est de même de toutes ses dérivées et en particulier on a  $S^{(n)}(0) = 0$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi,  $S$  est identiquement nulle.

### Exercice 9.

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des séries entières (à coefficients complexes) de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. L'addition et le produit de Cauchy de deux séries entières munissent  $\mathcal{A}$  d'une structure d'anneau. Montrer que  $\mathcal{A}$  est intègre.

#### Correction.

Soit  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  et  $g(z) = \sum_n b_n z^n$  deux séries entières de série de convergence au moins égal à 1, non identiquement nulles. Soit  $a_p$  le premier coefficient non-nul de  $f$  et soit  $b_q$  le premier coefficient non-nul de  $g$ . Alors  $fg$  est la série entière  $\sum_n c_n z^n$ , où  $c_n$  est donné par

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Maintenant, étudions le coefficient  $c_{p+q}$ . On a

$$c_{p+q} = a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_k b_{p+q-k} + \sum_{l=q+1}^{p+q} a_{p+q-l} b_l.$$

Ainsi,  $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$  et  $fg$  n'est pas la série entière identiquement nulle. L'anneau étudié est bien intègre.

**Exercice 10.**

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière définissant  $f$ .
2. Etudier la convergence en  $-R$  et en  $R$ .
3. (a) Soit  $M > 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $N \geq 1$  et un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , alors

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

- (b) En déduire la limite de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 1^-$ .
4. (a) On considère la série entière

$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] x^n.$$

Démontrer que cette série converge normalement sur  $[0, 1]$ .

- (b) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$ .

**Correction.**

1. Puisque  $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , on démontre par exemple par le critère de d'Alembert que le rayon de convergence vaut 1.
2. Par croissance de la fonction sinus entre 0 et  $\pi/2$ , la suite  $(\sin(1/\sqrt{n}))$  est décroissante, et positive. D'après le critère des séries alternées, la série converge en  $-1$ . En 1, la série  $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$  est divergente, par comparaison à la série de Riemann divergente  $\sum_n 1/\sqrt{n}$  (on compare bien des séries à termes positifs).
3. (a) La série  $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ , qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M + 1.$$

De plus, cet entier  $N$  étant fixé, la fonction  $h : x \mapsto \sum_{n=1}^N \sin(1/\sqrt{n})x^n$  est continue en 1. Ceci donne l'existence de  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ ,

$$h(x) \geq h(1) - 1.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

- (b) Puisqu'on a une série à termes positifs, la série majore toutes ses sommes partielles. Ainsi, pour tout  $M > 0$ , on peut trouver  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ ,

$$f(x) \geq M.$$

Ceci signifie exactement que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $1^-$ .

4. (a) Il est clair que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right|.$$

D'après, par exemple, l'inégalité des accroissements finis,

$$\left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \leq \frac{C}{n^{3/2}}.$$

La série (numérique) de terme général  $n^{-3/2}$  étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant  $g$  sur  $[0, 1]$ .

(b) Un calcul aisé montre que

$$(1-x)f(x) = \sin(1) + g(x).$$

Or,  $g$  étant continue en 1, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = \sin(1) + g(1) = \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] = 0.$$

### Exercice 11.

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de réels positifs. On note  $R$  et  $R'$  les rayons de convergence respectifs des séries entières  $\sum_n a_n x^n$  et  $\sum_n b_n x^n$ . Soient  $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$  et  $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$ . On suppose enfin qu'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

1. Montrer que  $R \geq R'$ . On suppose désormais que  $R' = 1$  et que la série  $\sum_n b_n$  est divergente.
2. Soit  $M > 0$ . Montrer qu'il existe un entier  $N \geq 0$  et un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , alors  $\sum_{n=0}^N b_n x^n \geq M$ .
3. En déduire que  $g(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow 1$ .
4. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $N \geq 1$  tel que  $(l - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l + \varepsilon)b_n$  pour tout  $n \geq N$ . Montrer que

$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où  $P$  est un polynôme, et  $(l - \varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l + \varepsilon)b_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

5. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

### Correction.

1. Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

$$|a_n| \leq (l + 1)|b_n|.$$

Soit maintenant  $r > 0$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

$$|a_n|r^n \leq (l+1)|b_n|r^n$$

et donc, si la suite  $(|b_n|r^n)$  est bornée, la suite  $(|a_n|r^n)$  l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence. Le rayon de convergence de  $\sum_n a_n x^n$  étant en effet donné par

$$R = \sup\{r \geq 0; (|a_n|r^n) \text{ est bornée} \}.$$

2. Fixons  $N \geq 1$  tel que  $\sum_{n=0}^N b_n \geq 2M$ . Posons ensuite  $P(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n$ . On a  $P(1) = 2M > M$ . Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de  $P$  en 1.
3. Soit  $M > 0$  et soient  $N, \delta$  donnés par la question précédente. Alors, puisque  $b_n$  est positif pour tout  $n$ , on a, pour chaque  $x \in ]0, 1[$ ,

$$g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n.$$

En particulier, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$g(x) \geq M.$$

Ceci prouve bien que  $g$  tend vers  $+\infty$  en 1.

4. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^N (a_n - b_n) x^n + \sum_{n=0}^N b_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé  $P(x) = \sum_{n=0}^N (a_n - b_n) x^n$  et  $c_n = b_n$  si  $n \leq N$ ,  $c_n = a_n$  sinon.

5. On fixe  $\varepsilon > 0$  et on décompose  $f$  comme précédemment. D'une part, on a  $(l - \varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l + \varepsilon)b_n$  et donc, multipliant par  $x^n$  et sommant pour  $n = 0, \dots, +\infty$ , on déduit que

$$(l - \varepsilon)g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (l + \varepsilon)g(x).$$

D'autre part, puisque  $P$  est un polynôme, donc est continu en 1, et que  $g(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 1$ , on sait que

$$\frac{P(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 1.$$

On en déduit l'existence de  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

## 2. Exercices d'entraînement

$$l - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que  $f/g$  tend vers  $l$  en 1.



**Exercice 12.**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  dans les cas suivants :

1. la suite  $(a_n)$  tend vers  $\ell \neq 0$  ;
2. la suite  $(a_n)$  est périodique, et non identiquement nulle ;
3.  $a_n$  est le nombre de diviseurs de  $n$  ;
4.  $a_n$  est la  $n$ -ième décimale de  $\sqrt{2}$ .

**Correction.**

1. Puisque la suite  $(a_n)$  est convergente, elle est bornée et donc la suite  $(a_n 1^n)$  est bornée. Ceci implique que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à 1. De plus, au voisinage de l'infini, on a  $a_n r^n \sim \ell r^n$ . Si  $r > 1$ , ceci tend vers  $+\infty$ . Le rayon de convergence de la série entière est donc exactement égal à 1.
2. Puisque la suite  $(a_n)$  est périodique, elle est bornée et un raisonnement identique à celui de la question précédente donne que le rayon de convergence est au moins égal à 1. De plus, puisque la suite  $(a_n)$  est périodique et non identiquement nulle, elle ne converge pas vers 0. Ainsi, la série  $\sum_n a_n 1^n$  est divergente. Le rayon de convergence vaut donc 1.
3. Il suffit de remarquer que  $1 \leq a_n \leq n$ , ce qui entraîne

$$|x|^n \leq |a_n x^n| \leq n|x|^n.$$

Ainsi, pour  $|x| < 1$ , la série  $\sum_n a_n x^n$  converge, et pour  $|x| > 1$ , elle diverge. Son rayon de convergence est donc égal à 1.

4. La suite  $(a_n)$  est une suite qui prend ses valeurs dans  $\{0, \dots, 9\}$  donc elle est bornée. Puisque  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre décimal,  $(a_n)$  prend une infinité de fois une valeur dans  $\{1, \dots, 9\}$ . En particulier,  $(a_n)$  ne tend pas vers 0. Raisonnant comme ci-dessus, on trouve que le rayon de convergence vaut exactement 1.

**Exercice 13.**

Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note  $R'$  le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$ .

1. Démontrer que  $R' \geq \max(1, R)$ .
2. Démontrer que  $R' = \max(1, R)$ .

**Correction.**

1. On a d'une part  $|b_n| \leq 1$  et d'autre part  $|b_n| \leq |a_n|$ . Ces deux inégalités montrent que  $R' \geq \max(1, R)$ .
2. Si  $R' = 1$ , alors  $R \leq 1$  et on a bien  $R' = \max(1, R)$ . Supposons maintenant que  $R' > 1$  et prouvons que  $R' = R$ , ou encore que  $R \geq R'$ . Pour cela, on remarque que, puisque  $R' > 1$ , la série  $\sum_n b_n$  est convergente et donc  $(b_n)$  converge vers 0. On peut alors exprimer  $|a_n|$  et

fonction de  $|b_n|$  en écrivant

$$|a_n| = \frac{|b_n|}{1 - |b_n|}.$$

Ainsi, si la suite  $(b_n r^n)$  est bornée, il en est de même de la suite  $(a_n r^n)$  et donc  $R \geq R'$ .

#### Exercice 14.

Soit  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n b_n z^n$  deux séries entières de rayon de convergence respectif  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Montrer que le rayon de convergence  $R$  de la série  $\sum_n a_n b_n z^n$  vérifie  $R \geq \rho_1 \rho_2$ . A-t-on toujours égalité ?

#### Correction.

Soit  $0 \leq r < \rho_1 \rho_2$ . Alors il existe  $r_1 < \rho_1$  et  $r_2 < \rho_2$  tel que  $r = r_1 r_2$ . Les suites  $(a_n r_1^n)$  et  $(b_n r_2^n)$  sont bornées. Il en est de même de la suite  $(a_n b_n r_1^n r_2^n)$ , c'est-à-dire de la suite  $(a_n b_n r^n)$ . Comme ceci est vrai pour tout  $r < \rho_1 \rho_2$ , le rayon de convergence recherché est au moins égal à  $\rho_1 \rho_2$ . On n'a pas toujours égalité. En effet, si la première série est  $\sum_n z^{2n}$  et la deuxième série est  $\sum_n z^{2n+1}$ , alors leur produit de Hadamard est la série nulle, qui est de rayon de convergence égal à  $+\infty$ , alors que dans ce cas  $\rho_1 \rho_2 = 1 \times 1 = 1$ .

#### Exercice 15.

Soit  $R$  le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^n$ . Comparer  $R$  avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

$$1. a_n e^{\sqrt{n}} z^n \quad 2. a_n z^{2n} \quad 3. a_n z^{n^2}.$$

#### Correction.

- Notons  $R_1$  le rayon de convergence de  $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ . Puisque  $|a_n| e^{\sqrt{n}} \geq |a_n|$ , on a  $R_1 \leq R$ . Soit maintenant  $r > 0$  tel que  $(a_n r^n)$  soit bornée. Alors, pour tout  $\rho \in [0, r[$ , on a

$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho^n}{r^n} = a_n r^n e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$$

et comme  $e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n)$  est bornée. On en déduit que  $R \leq R_1$  et donc finalement que  $R = R_1$ .

- Il est clair que  $(a_n r^{2n})$  est bornée si et seulement si  $(a_n (r^2)^n)$  est bornée (c'est la même suite écrite de deux façons différentes). Le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{2n}$  est donc égal à  $\sqrt{R}$ .
- Supposons d'abord  $R > 0$  et  $R < +\infty$ . On va alors prouver que le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  est égal à 1. En effet, soit  $r$  tel que  $(a_n r^n)$  est bornée. Alors, pour tout  $\rho < 1$ , on a  $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \times \frac{\rho^{n^2}}{r^n}$  et cette quantité est bornée car  $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$  tend vers 0 (on a choisi  $\rho < 1$ ). Ainsi, le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  est supérieur ou égal à 1. De façon similaire, on prouve que, si  $r$  est tel que  $a_n r^n$  n'est pas bornée, alors pour tout  $\rho > 1$ , on a  $a_n \rho^{n^2}$  qui n'est pas bornée. Ainsi, le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  est égal à 1. Lorsque  $R = +\infty$ ,

alors le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  sera élément de  $[1, +\infty]$ , mais toutes les valeurs peuvent être prises : <ul class="rien">

4. Si  $a_n = 1/n!$ , alors le rayon vaut 1.
5. Si  $a_n = 1/n!^2$ , alors le rayon vaut  $+\infty$ .
6. Si  $a_n = 1/\lambda^{n^2}$ , avec  $\lambda > 1$ , le rayon de convergence vaut  $\lambda$ . </ul> De même, si  $R = 0$ , alors le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{n^2}$  peut être n'importe quel réel dans  $[0, 1]$ .

### Exercice 16.

Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $\rho$ . Soit  $S_n = a_0 + \dots + a_n$  et soit  $R$  le rayon de convergence de la série  $\sum_n S_n z^n$ .

1. Montrer que  $R \leq \rho$ .
2. Montrer que  $\inf(1, \rho) \leq R$ .

### Correction.

1. Remarquons que  $a_n = S_n - S_{n-1}$  et donc que  $\sum_n a_n z^n = \sum_n S_n z^n - \sum_n S_{n-1} z^n$ . Ainsi,  $\sum_n a_n z^n$  est la différence de deux séries entières de rayon de convergence  $R$ , son rayon de convergence  $\rho$  vérifie  $\rho \geq R$ .
2. La série  $\sum_n S_n z^n$  est le produit de Cauchy des deux séries entières  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n z^n$ . Ces deux séries ont pour rayon de convergence respectif  $\rho$  et 1. On en déduit que le rayon de convergence  $R$  de la série  $\sum_n S_n z^n$  vérifie  $R \geq \inf(1, \rho)$ .

### Exercice 17.

1. Montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .
2. Soit  $f$  la somme de la série entière  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$ . Montrer que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ .

### Correction.

1. On remarque d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0. En effet, au voisinage de 0, on a

$$\frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} \sim \frac{-t^4}{t^2} = -t^2$$

et la fonction se prolonge par 0 en 0. Au voisinage de  $+\infty$ , la fonction est équivalente à  $\frac{1}{t^2}$  qui est intégrable car  $2 > 1$ . La fonction est donc intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

2. La fonction  $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$  est développable en série entière en 0, de rayon de convergence  $+\infty$ , et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!}.$$

Par intégration de cette série entière, on trouve

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!} dt = \int_0^x \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} dt.$$

Ainsi,  $f$  admet une limite en  $+\infty$  égale à  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} dt$ .

### Exercice 18.

Soit  $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que  $S(x)$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $1^-$  et on note  $\ell$  cette limite.

1. La série  $\sum_n a_n$  est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose désormais que  $a_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que la série  $\sum_n a_n$  converge et que  $\ell = \sum_{n \geq 0} a_n$ .

### Correction.

1. Pour  $a_n = (-1)^n$ , on a  $S(x) = \frac{1}{1+x}$  qui tend vers  $1/2$  si  $x$  tend vers  $1^-$ , alors que la série  $\sum_n a_n$  diverge.
2. Remarquons d'abord que  $S$  est croissante (puisque chaque  $x \mapsto a_n x^n$  est croissante). Ainsi, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $S(x) \leq \ell$ . Mais alors, pour chaque  $N \in \mathbb{N}$ , on a encore

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n \leq S(x) \leq \ell.$$

Si on fait tendre  $x$  vers  $1^-$ , on obtient que

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq \ell.$$

Les sommes partielles de la série  $\sum_n a_n$ , qui est à termes positifs, sont majorées, et donc la série est convergente. De plus, on a par le passage à la limite précédent  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \ell$ . Fixons ensuite  $\varepsilon > 0$  et  $x \in [0, 1[$  tel que  $S(x) \geq \ell - \varepsilon$ . Il vient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq \ell - \varepsilon.$$

Ceci prouve le résultat demandé.

### Exercice 19.

Soit  $f(z) = \sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et soit  $r \in ]0, R[$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $k$ , la série de fonctions  $\theta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ .

2. En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

3. Application : on suppose que  $R = +\infty$  et que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Correction.**

1. Puisque  $r < R$ , il résulte du lemme d'Abel que la série  $\sum_n |a_n| r^n$  est convergente. Puisque  $|a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n| r^n$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on en déduit la convergence normale de la série demandée sur  $[0, 2\pi]$ .

2. On a

$$f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} = \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$

Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur  $[0, 2\pi]$ , on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = \sum_n a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

La dernière intégrale est égale à 0 si  $k \neq n$ , et à  $2\pi$  sinon. On en conclut que

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi a_k r^k.$$

3. Pour  $k \geq 1$ , on a

$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Soit  $M > 0$  tel que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Alors on a

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{M}{r^k}.$$

Faisant tendre  $r$  vers  $+\infty$ , on trouve  $a_k = 0$  pour  $k \geq 1$ , ce qui entraîne que  $f$  est constante.

**Exercice 20.**

Soit  $(a_n)$  une suite de réels tel que  $\sum_n a_n x^n$  soit de rayon de convergence 1. On note  $f$  la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique  $\sum_n a_n$  converge et on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout  $n \geq 1$ , on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Correction.

1. On commence par couper la somme en  $n$  et par remarquer que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n.$$

La clé ici est d'écrire dans la deuxième somme  $a_k = R_{k-1} - R_k$  (et d'effectuer ce qu'on appelle une transformation d'Abel). Pour  $m \geq n+1$ , il vient

$$\sum_{k=n+1}^m a_k x^k = \sum_{k=n+1}^m (R_{k-1} - R_k) x^k = \sum_{k=n+1}^m R_k (x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1} - R_m x^{m+1}.$$

Puisque  $(R_p)$  tend vers 0, on peut faire tendre  $m$  vers  $\infty$  et on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n x^{n+1},$$

ce qui donne bien

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^n a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. On va d'abord fixer  $n$  pour que la deuxième somme soit petite, indépendamment de  $x$  dans  $[0, 1[$ , puis on va faire tendre  $x$  vers 1. Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $k \geq n$ , on a  $|R_k| \leq \varepsilon$ . On en déduit, pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\left| (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k \right| \leq \varepsilon |x-1| \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq \varepsilon.$$

On a de plus, toujours pour cette valeur de  $n$ ,

$$|R_n(x^{n+1} - 1)| \leq 2\varepsilon.$$

Cette valeur de  $n$  étant fixée, la fonction  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k(x^k - 1)$  est continue en 0, de limite nulle. Ainsi, on peut trouver  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k(x^k - 1) \right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, en mettant tous les résultats ensembles, on trouve qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in ]1 - \delta, 1[$ , on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq 4\varepsilon.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

### 3. Exercices d'approfondissement

#### Exercice 21.

Soit  $(a_n)$  une suite de réels qui converge vers  $l$ .

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$  ?
2. On note  $f$  la somme de la série entière précédente. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x)$ .

#### Correction.

1. Puisque la suite  $(a_n)$  est convergente, elle est bornée, disons par  $M > 0$ . Mais, par application du critère de d'Alembert, la série  $\sum_n Mx^n/n!$  est convergente pour tout réel  $x$ . Le rayon de convergence de la série est donc égal à  $+\infty$ .
2. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $N \geq 1$  tel que, pour  $n \geq N$ , on a  $|a_n - l| \leq \varepsilon$ . On écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + l e^x. \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n := f_1(x) + f_2(x).$$

Puisque  $f_1$  est un polynôme, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f_1(x) = 0$ . Il existe donc  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que, pour  $x \geq x_0$ ,

$$e^{-x} |f_1(x)| \leq \varepsilon.$$

De plus, on a, pour  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} e^{-x} |f_2(x)| &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|a_n - l|}{n!} x^n \\ &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \varepsilon e^{-x} e^x = \varepsilon. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité triangulaire on trouve, pour tout  $x \geq x_0$ ,

$$|e^{-x}f(x) - l| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi,  $e^{-x}f(x)$  tend vers  $l$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 22.

Soit  $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que  $S(x)$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers  $1^-$  et on note  $\ell$  cette limite. On suppose enfin que  $a_n = o(1/n)$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , on note

$$A_N(x) = S(x) - \ell, \quad B_N(x) = \sum_{n=0}^N (1-x^n)a_n, \quad C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Vérifier que  $\sum_{n=0}^N a_n - \ell = A_N(x) + B_N(x) - C_N(x)$ .
2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Démontrer qu'il existe un entier  $N_0$  tel que, pour tout  $N \geq N_0$ ,

$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Démontrer que la série  $\sum_n a_n$  converge et que sa somme vaut  $\ell$ .

### Correction.

1. Il s'agit d'une simple vérification algébrique.
2. Soit  $N_0$  tel que, pour tout  $n \geq N_0$ ,  $|a_n| \leq \varepsilon/n$ . Pour  $N \geq N_0$ , il vient

$$|C_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n \geq N+1} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Le résultat de la question précédente nous incite à choisir  $x = 1 - \frac{1}{N}$ , de sorte à avoir une grande valeur de  $x$  qui garantisse néanmoins que  $|C_N(x)| \leq \varepsilon$ . Majorons ensuite les autres termes. Pour  $A_N(x)$ , c'est facile. Il existe un entier  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $N \geq N_1$ ,

$$|A_N(x)| = \left| S\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction  $t \mapsto t^n$ , on a

$$|1 - x^n| \leq n(1-x) \leq \frac{n}{N}.$$

Il vient

$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n a_n.$$

D'après le théorème de Cesaro, puisque  $(n a_n)$  tend vers 0, on sait que  $|B_N(1 - 1/N)|$  tend vers 0, et donc il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $N \geq N_2$ ,

$$|B_N(x)| \leq \varepsilon.$$



Finalement, pour tout  $N \geq \max(N_0, N_1, N_2)$ , on trouve

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \ell \right| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la série  $\sum_n a_n$  et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$ .

### Exercice 23.

Soit  $f$  une fonction développable en série entière, non identiquement nulle, dont le rayon de convergence vaut  $+\infty$ . Démontrer que l'ensemble  $A$  des zéros de  $f$  (sur  $\mathbb{C}$ ) est un fermé constitué de points isolés ?

### Correction.

On règle d'abord le cas où  $f$  est identiquement nulle. Dans le cas contraire, prouvons d'abord que  $A$  est fermé : si  $(z_n)$  est une suite de zéros de  $f$ , et si  $z_n \rightarrow z$ , alors par continuité de  $f$  en  $z$  on a aussi  $f(z) = 0$ , et donc  $z \in A$ . En outre,  $A$  est constitué uniquement de points isolés, c'est-à-dire que si  $z_0 \in A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $z_0$  tel que  $V \cap A = \{z_0\}$ . En effet, puisque le rayon de convergence du développement en série entière de  $f$  vaut  $+\infty$ ,  $f$  est aussi développable en série entière au voisinage de  $z_0$ , avec un développement ayant un rayon de convergence égal à  $+\infty$ . Ce développement s'écrit :

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

où on peut supposer  $a_n \neq 0$  ( $f$  est non identiquement nulle). On a alors :

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

où  $g$  est une fonction continue vérifiant  $g(z_0) = a_n \neq 0$ . Par continuité,  $g$ , donc  $f$ , ne s'annule pas dans un voisinage de  $z_0$ , sauf en  $z_0$ .