Feuille d'exercices n°17

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a>0$	**4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Exercice 2.

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 3.

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 4.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$	**2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$	**3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$		

Exercice 5.

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n\geq 1} S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $(1-x)F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

Exercice 6.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t)=\cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Exercice 7.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 8.

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

1. $f(x)=\sin(x)/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.
2. $g(x)=\mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x\geq 0$ et $g(x)=\cos(\sqrt{-x})$ si $x<0$.
3. $h(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ si $x\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, $h(0)=0$.

Exercice 9.

Prouver que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x)\leq e^{x^2/2}$.

Exercice 10.

On considère la série entière $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R,R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R,R[$. En déduire une expression de f sur $]-R,R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 11.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1,1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 12.

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
2. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

2. Exercices d'entraînement et d'approfondissement

Exercice 13.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Exercice 14.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale de Wallis $I_{2n} = \int_0^\pi \sin^{2n} x dx$ à l'aide de la formule $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$.
2. Justifier que, tout tout $u \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} u^n.$$

3. Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}.$$

Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.

Exercice 15.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt = \frac{k!}{2}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} \sin(tx) dt$$

   (a) en procédant à une intégration terme à terme ;
   (b) en déterminant une équation différentielle dont le fonction est solution.

Exercice 16.

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{n^2 ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque k, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 17.

Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 18.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$f(x) = f(x) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du.$$

   On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du$.
2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1} R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

Exercice 19.

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n) ?

2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Exercice 20.

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit
$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Méthode 1. On note $j = e^{2i\pi/3}$.
   (a) Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.
   (b) En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.
2. Méthode 2.
   (a) Former une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par S.
   (b) La résoudre.
   (c) Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 21.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(x)dx$.
2. Démontrer que $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Exercice 22.

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,
$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

1. On suppose que la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif $r > 0$. Démontrer que, pout tout $x \in]-r, -r[$, on a $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.
2. En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, $x \neq 0$.
3. En développant en série entière la fonction précédente, calculer u_n en fonction de n.