Corrigé de la feuille d'exercices n°17

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a>0$	**4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Correction.

1. Il suffit de remplacer t par $2x^2$ dans le développement en série entière de $\ln(1+t)$. On a donc
$$\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n x^{2n}}{n}.$$
La série converge si $|2x^2|<1$. Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Il suffit de factoriser par a au dénominateur et d'utiliser le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$. Il vient
$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}}.$$
Pour $|x/a|<1 \iff |x|<|a|$, on obtient
$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$
Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.
3. On factorise par a :
$$\ln(x+a) = \ln\big(a(1+x/a)\big) = \ln(a) + \ln(1+x/a).$$
Pour $|x/a|<1$, soit $|x|<a$, on en déduit
$$\ln(x+a) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{na^n}.$$
Le rayon de convergence de la série entière obtenue est a.
4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour $|x|<1$, on a

$$\frac{e^x}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \text{ avec } a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

La série converge pour $|x|<1$ (règle du produit de Cauchy), et comme $a_n\geq 1$, le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1 puisque, pour $|x|>1$, la série $\sum_n a_nx^n$ ne peut pas converger puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

5. On a $1+x-2x^2=(1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $I=]-1/2,1[$, et sur cet intervalle, elle s'écrit

$$\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x).$$

En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on obtient

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

(valable pour $|x|<1$)

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$

(valable pour $|x|<1/2$). En effectuant la somme, on en déduit que

$$\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n.$$

La série obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

6. On factorise par 4 pour se ramener à $(1+t)^\alpha$. On a donc

$$(4+x^2)^{-3/2}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}.$$

La fonction $u\mapsto(1+u)^{-3/2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall u\in]-1,1[,\ (1+u)^{-3/2}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n}u^n.$$

Il en résulte que pour tout x tel que $\frac{x^2}{4}\in]-1,1[$, on a

$$\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}=1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n}\frac{x^{2n}}{4^n}.$$

La série entière obtenue a pour rayon de convergence $]-2,2[$.

Exercice 2.

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Correction.

Notons f la fonction considérée. On pourrait écrire $f(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ et réaliser le produit de Cauchy de ces deux développements. Il y a plus simple. On peut encore écrire

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}.$$

En écrivant le développement de $(1+u)^\alpha$ avec $u = -x^2$ et $\alpha = -1/2$, il vient

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(x^{2n} + x^{2n+1}\right).$$

On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Exercice 3.

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Correction.

On décompose f en éléments simples. Puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{2x-1}.$$

Si on multiplie les deux membres par $2x-1$ et qu'on fait $x = 1/2$, on trouve $c = \frac{1/4+1/2-3}{9/4} = -1$. De même, multipliant par $(x-2)^2$, on trouve $b = 1$. Pour trouver a, on peut procéder par identification et on obtient $a = 1$. On développe en série entière chaque terme :

— Pour $x \neq 2$,

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x/2}.$$

Donc, pour $|x|/2 < 1$, on a

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} x^n.$$

— Le troisième terme se traite de la même façon. Pour $|x| < 1/2$, on a

$$\frac{-1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

— Pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{x-2}$. Ayant déjà obtenu le développement en série entière de cette fraction rationnelle, il suffit de le dériver terme à terme. On obtient donc :

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n.$$

On obtient donc que, pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n \right) x^n.$$

La série entière obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

Exercice 4.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{n-1}{n!}$. On vérifie facilement que la suite (u_{n+1}/u_n) tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$. Pour déterminer sa somme, on écrit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x \cdot x^n}{n!} - e^x = (x-1)e^x.$$

2. Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Puisque $u_n \to 1$, la suite $|u_n z^n|$ est bornée si $|z| < 1$ et tend vers $+\infty$ si $|z| > 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n+1}x^n &= \sum_{n\geq 0}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^n\\ &= \frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

3. Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$. Ensuite, l'"astuce", dans ce type d'exercice où on voit apparaitre une fraction du type $P(n)/n!$, avec P un polynôme, et d'écrire le polynôme dans la base $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \cdots$, dans le but de faire apparaitre la série de la fonction exponentielle. Ici, on a

$$(n+1)(n-2) = n^2-n-2 = n(n-1)-2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}x^n &= \sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{n!}x^n-2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n\\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n-2)!}x^n-2e^x\\ &= x^2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n-2e^x=(x^2-2)e^x.\end{aligned}$$

4. Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Pour identifier la somme, que nous noterons S, il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle, mais il faut l'évaluer en $-x^2/2$ pour voir apparaitre le $(-1)^n x^{2n}$ au numérateur et le 2^n au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour $n=1$), on obtient

$$S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n}=1-\exp(-x^2/2).$$

Exercice 5.

Pour $n\geq 1$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1}S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R=1$.
2. On pose, pour $x\in]-1,1[$, $F(x)=\sum_{n\geq 1}S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x\in]-1,1[$, on a $(1-x)F(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

Correction.

1. Il est d'abord clair que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq S_n \leq n$. Donc, pour $\rho > 0$, on a
$$\rho^n \leq S_n \rho^n \leq n\rho^n.$$
Ainsi, si $\rho \in]0,1[$, la suite $(S_n\rho^n)$ est bornée (on peut même dire qu'elle tend vers 0), et si $\rho > 1$, la suite $(S_n\rho^n)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que le rayon de convergence de S vaut 1.
2. On développe et on fait un changement d'indices dans une des deux sommes :
$$\begin{aligned}(1-x)F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^{n+1}\\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (S_n - S_{n-1})\, x^n\\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\\ &= -\ln(1-x).\end{aligned}$$
3. Ayant reconnu le développement en série entière de $-\ln(1-x)$, on en déduit que
$$F(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 6.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Correction.

1. On dérive deux fois f :
$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(\alpha \arcsin t)\\ f'(t) &= \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin t)\\ f''(t) &= \frac{-\alpha^2}{1-t^2}\cos(\alpha\arcsin t) - \frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \sin(\alpha \arcsin t).\end{aligned}$$
On combine d'abord f et f'' pour éliminer les termes en $\cos(\alpha \arcsin t)$ puis on ajoute les termes en f' nécessaires pour éliminer les termes en $\sin(\alpha \arcsin t)$. Au final, on trouve que

f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t)=\sum_{n\geq 0}a_nt^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$. La fonction $t\mapsto(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0}\big((n+1)(n+1)a_{n+2}+(-n(n-1)-n+\alpha^2)a_n\big)t^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=(n^2-\alpha^2)a_n.$$

Puisque $a_0=1$ (car $y(0)=1$) et $a_1=y'(0)=0$, on en déduit que $a_{2p+1}=0$ pour tout p et que a un rayon de convergence égal à 1 (on le vérifie facilement par la règle de d'Alembert) et est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-t^2\neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et

Exercice 7.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\exp(\lambda\arcsin x)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction.

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(\lambda\arcsin x)\\
f'(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\exp(\lambda\arcsin t)\\
f''(x) &= \frac{\lambda x}{1-x^2}\exp(\lambda\arcsin x)+\frac{\lambda^2}{1-x^2}\exp(\lambda\arcsin x).
\end{aligned}$$

On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y''-xy'-\lambda^2y=0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $t\mapsto (1-x^2)y''-xy'-\lambda^2 y$ est donc somme de la série entière
$$\sum_{n\geq 0}\big((n+1)(n+1)a_{n+2}+(-n(n-1)-n-\lambda^2)a_n\big)x^n.$$
Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$a_{n+2}=\frac{n^2+\lambda^2}{(n+1)(n+2)}a_n.$$
De plus, $a_0=1$ (car $y(0)=1$) et $a_1=y'(0)=\lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer expliciter a_n, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n\to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.
3. L'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'-\lambda^2y=0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-x^2\neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$.

Exercice 8.

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :
1. $f(x)=\sin(x)/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.
2. $g(x)=\mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x\geq 0$ et $g(x)=\cos(\sqrt{-x})$ si $x<0$.
3. $h(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ si $x\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, $h(0)=0$.

Correction.

1. Pour $x\neq 0$, on a, d'après le développement en série entière de sin,
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$
Cette égalité est encore vraie en 0, puisque les deux membres sont alors égaux à 0. Ainsi, f coïncide sur $\mathbb{R}$ avec une série entière de rayon de convergence $+\infty$. f est donc de classe C^∞.
2. Pour $x\geq 0$, on a
$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

Pour $x < 0$, on a :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Ainsi, g coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$: elle est donc de classe C^∞.

3. Pour $x \neq 0$, on a

$$h(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

On développe en série entière le numérateur et le dénominateur, en mettant en facteur le premier terme. On trouve

$$h(x) = \frac{x^2 \times \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}}{x^2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}}.$$

Posant $u(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}$ et $v(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$, on voit que pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Or, u et v sont de classe C^∞ (ce sont des sommes de série entière), v ne s'annule pas en 0, et de plus $u(0)/v(0) = 0 = h(0)$. Ainsi, h définit bien une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 comme quotient de deux fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas en 0.

Exercice 9.

Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$.

Correction.

Développons les deux fonctions en série entière. On a

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ et } e^{x^2/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$

Puisque $x^{2k} \geq 0$, le résultat sera démontré si on prouve que, pour tout $k \geq 0$, on a $(2k)! \geq 2^k k!$. C'est vrai pour $k = 0$, et pour $k \geq 1$, on écrit simplement :

$$\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{2k \times (2k-1) \times \cdots \times (k+1)}{2 \times 2 \times \cdots \times 2}.$$

Comme $k + 1 \geq 2$, $k + 2 \geq 2 \ldots$, on obtient bien le résultat voulu.

Exercice 10.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?

2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)} \to |x|^2$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour $x = 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour $x = -1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n(2n+1)}$ est convergente. f est donc définie sur $[-1, 1]$.
2. La théorie des séries entières nous dit que f est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $]-1, 1[$. Pour prouver la continuité sur $[-1, 1]$, on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. En effet, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a
$$\left| \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(2n+1)}$$
et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de x). La série est donc normalement convergente sur $[-1, 1]$. Comme chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1, 1]$, on en déduit que f est continue sur $[-1, 1]$.
3. La série dérivée est, pour $|x| < 1$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \ln(1 + x^2).$$
En effet, pour $x \in]-1, 1[$, on a $0 \leq x^2 < 1$ et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de $\ln(1 + u)$. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2)dt$. On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :
$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x 1 \times \ln(1 + t^2)dt \\
&= \left[\frac{t}{1 + t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1 + t^2}dt \\
&= x \ln(1 + x^2) - 2 \int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}dt \\
&= x \ln(1 + x^2) - 2 \int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt \\
&= x \ln(1 + x^2) - 2 \left[t - \arctan(t)\right]_0^x \\
&= x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x.
\end{aligned}$$

4. L'égalité $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$ n'est valable que pour $x \in]-1,1[$. Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur $[0,1]$ tout entier. On conclut que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 11.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1,1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Correction.

1. Le rayon de convergence de la série entière est 1. De plus, puisque
$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
on a aussi convergence en 1 et -1. L'intervalle de convergence est donc $[-1,1]$.
2. Les théorèmes usuels concernant les séries entières ne donnent la continuité que sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Si on veut obtenir la continuité sur l'intervalle fermé, il faut aller plus loin ! Pour cela, on va montrer la convergence normale de la série sur l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \geq 2$, on a
$$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
et cette dernière série est convergente. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit la continuité de f sur $[-1,1]$.
3. f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a
$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x).$$
Par intégration, pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C.$$
La constante C se calcule en remarquant que $f(0) = 0 = C$.
4. L'égalité précédente est, a priori, vraie sur $]-1,1[$, mais puisque f et $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ sont continues en 1, elle est aussi vraie en 1. On en déduit
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = 2\ln(2) - 1.$$

Exercice 12.

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

1. Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
2. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
3. Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Correction.

1. Soit $r > 0$ le rayon de convergence de f. On a, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ xf'(x) &= x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in]-r, r[$, on a

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n.$$

Or, $f'' + xf' + f = 1$. Par unicité du développement en série entière, on obtient $b_0 = 1$ et $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ceci nous donne les relations

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_0) \text{ et } a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \text{ pour } n \geq 1.$$

2. On sait en outre que $a_0 = y(0) = 0$ et que $a_1 = y'(0) = 0$. On en déduit que tous les termes impairs a_{2n+1} sont nuls, puis que, pour les termes pairs

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \left(\frac{-1}{2n}\right) \times \left(\frac{-1}{2n-2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{4}\right) a_2 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}. \end{aligned}$$

On factorise tous les termes qui sont pairs au dénominateur, et on trouve

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$$

valable pour $n \geq 1$. Réciproquement, posons

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}.$$

La série entière qui apparait est de rayon de convergence égal à $+\infty$, la fonction f ainsi définie est donc de classe C^∞ et, remontant les calculs, elle est solution de l'équation différentielle initiale.

3. De plus, on peut l'identifier à une fonction classique. En effet,

$$f(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = 1 - \exp(-x^2/2).$$

2. Exercices d'entraînement et d'approfondissement

Exercice 13.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$. De $u_{n+1}/u_n \to x^2$, on tire que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour $x \in]-1,1[$, $S(x)$ la somme de la série entière. Alors S est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$(xS)'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$
Par intégration, on en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
et donc, pour $x \neq 0$,
$$S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
De plus, $S(0) = 1$.
2. Posons $u_n = \frac{n^3}{n!}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0.$$
Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer n^3 en fonction de $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$ et n pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :
$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$
Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^{3n} = x^3 \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} x^{3n-3} = x^3 \exp(x).$$

De même, on a

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{n!}x^{3n}=x^2\exp(x) \text{ et } \sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}x^{3n}=x\exp(x).$$

On conclut que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n=(x^3+3x^2+x)\exp(x).$$

3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1. De plus, si on pose $f(x)=\frac{1}{1+x}$, on a pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n.$$

En dérivant, il vient

$$-\frac{x}{(1+x)^2}=xf'(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n n x^n,$$

soit finalement

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}=x\times\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

4. Il est facile de vérifier, à l'aide de la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle. On trouve

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1/2}{2n-1}-\frac{1/2}{2n+1}.$$

Posons $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ et $g(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n-1}$. Alors, d'après la première question, on sait que pour $x\neq 0$, on a

$$f(x)=\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On se ramène à ce cas pour g, en remarquant que

$$\begin{aligned} g(x) &= -1+\sum_{n\geq 1}\frac{x^2x^{2(n-1)}}{2(n-1)+1}\\ &= -1+x^2\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}\\ &= -1+x^2f(x). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que, notant S la somme de la série initiale, pour $x\neq 0$ dans l'intervalle $]-1,1[$,

$$S(x)=-\frac{1}{2}+\frac{x^2-1}{4x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Il est aussi clair que $S(0)=-1$.

Exercice 14.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale de Wallis $I_{2n} = \int_0^\pi \sin^{2n} x dx$ à l'aide de la formule $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$.
2. Justifier que, tout tout $u \in]-1,1[$, on a
$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} u^n.$$
3. Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose
$$f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}.$$
Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.

Correction.

1. Utilisant l'indication, on a
$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{(2i)^{2n}} \int_0^\pi (e^{ix} - e^{-ix})^{2n} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{4^n} \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} (e^{ix})^{2n-k} (e^{-ix})^k dx \\ &= \frac{(-1)^n}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \int_0^\pi e^{(2n-2k)ix} dx. \end{aligned}$$
Or, cette dernière intégrale est nulle sauf si $n = k$, où elle vaut π. Il vient
$$I_{2n} = \frac{\pi\binom{2n}{n}}{4^n}.$$
2. On sait, que pour tout $u \in]-1,1[$, on a
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-u}} &= (1-u)^{-1/2} \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\frac{-1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(-1)\times(-3)\times\cdots\times(-2n-1)}{2^n n!} u^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} u^n. \end{aligned}$$
3. D'après la question précédente, appliquée à $u = x^2 \sin^2 t \in]-1,1[$, on a
$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^{2n} \sin^{2n} t.$$

On va permuter la limite et l'intégrale. Pour cela, on remarque que la série est uniformément convergente pour $t \in [0, \pi]$ (on travaille avec x fixé). En effet, on a $|x \sin t| \leq |x| < 1$, et on sait que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}|x|^{2n}$ est convergente puisque le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$ a pour rayon de convergence 1. On peut donc inverser la limite et l'intégrale, et on trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^{2n} \int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\pi}{16^n}\binom{2n}{n}^2 x^{2n}. \end{aligned}$$

La fonction f est bien développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Exercice 15.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt = \frac{k!}{2}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} \sin(tx) dt$$

   (a) en procédant à une intégration terme à terme ;
   (b) en déterminant une équation différentielle dont le fonction est solution.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto t^{2k+1} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $t^{2k+1} e^{-t^2} = o(t^{-2})$. Ceci justifie la convergence de $I_k = \int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt$. De plus, en réalisant une intégration par parties (on intègre te^{-t^2} et on dérive t^{2k}), on a pour $k \geq 1$

$$I_k = \left[\frac{-1}{2} t^{2k+1} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} t^{2k-1} e^{-t^2} dt = k I_{k-1}.$$

Comme de plus

$$I_0 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

on en déduit que $I_k = \frac{k!}{2}$.

2. (a) Puisque la fonction sinus est développable en série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\sin(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1},$$

c'est-à-dire que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tx)^{2k+1} e^{-t^2} dt.$$

On va ensuite permuter la série et l'intégrale en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}e^{-t^2}\right|dt \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}I_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}.$$

Or, posons $u_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}$. On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} \to 0.$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_k u_k$ converge, il en est donc de même de la série $\sum_k \int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}e^{-t^2}\right|dt$. Par le théorème d'intégration terme à terme, on peut permuter la série et l'intégration, et on obtient donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}e^{-t^2}dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

(b) On va appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres. Pour cela, posons $g(x,t) = e^{-t^2}\sin(tx)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$. De plus, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\cos(tx)$$

ce qui implique que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in[0,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq te^{-t^2}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend plus de x) est intégrable sur $[0,+\infty[$. Ainsi, f est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\cos(tx)dt.$$

Pour former une équation différentielle vérifiée par f, on va intégrer par parties, en intégrant te^{-t^2} et en dérivant $\cos(tx)$. Il vient

$$f'(x) = \left[\frac{-1}{2}e^{-t^2}\cos(tx)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(tx)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $2y' + xy = 1$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; d'après le théorème de Cauchy, f est la solution de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 0$. Cherchons maintenant une solution $y(x) = \sum_{k\geq 1} a_k x^k$ de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 0$. On a

$$2\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 1$$

soit

$$2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\left((k+2)a_{k+2} + a_k\right)x^{k+1} = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_1 = \frac{1}{2}$ puis que $a_{k+2} = \frac{-a_k}{k+2}$. Après un calcul standard, on trouve (évidemment !) le même développement en série entière qu'à la question précédente.

Exercice 16.

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}e^{n^2ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque k, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\geq k^ke^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Correction.

1. Posons $u_n(x)=e^{-n}e^{n^2ix}$. Alors u_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k\geq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\geq 0$, on a
$$u_n^{(k)}(x)=(in^2)^ke^{-n}e^{n^2ix}.$$
Puisque $n^{2k}e^{-n}=O(n^{-2})$, il existe une constante $M>0$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$|u_n^{(k)}(x)|\leq Mn^{-2}.$$
La série (numérique) qui apparait à droite est convergente, on en déduit que la série des dérivées k-ièmes $\sum_{n\geq 0}u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ pour tout $k\geq 0$. Ainsi, $f=\sum_n u_n$ est de classe C^∞.
2. D'après le calcul précédent, on a $|f^{(k)}(0)|=\sum_{n\geq 0}n^{2k}e^{-n}\geq k^{2k}e^{-k}$. Or, $k^k\geq k!$, et donc
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\geq\frac{k^k}{k!}k^ke^{-k}\geq k^ke^{-k}.$$
3. Si la fonction était développable en série entière en 0, il existerait un intervalle non-vide I centré en 0 tel que, pour tout $x\in I$, f serait somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, on aurait
$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$
Mais pour $x\neq 0$, cette série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. En effet,
$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\geq k^k(x/e)^k\to+\infty$$
(on peut aussi vérifier la non-convergence par le critère de d'Alembert). Ainsi, f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 17.

Pour $x>-1$, on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Correction.

On utilise que $\frac{1}{x+n}=\int_0^1 t^{x+n-1}dx$. On a donc :

$$u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 t^{x+n-1}dx.$$

On va permuter la série et l'intégrale. Pour cela, on pose

$$f_N(t)=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n t^{x+n-1}.$$

Alors :

- $f_N(t)$ converge simplement vers $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{n-1}t^x=\frac{-t^x}{1+t}=f(t)$.
- $|f_N(t)|\leq t^x$ (car la somme partielle d'une série alternée est majorée par le premier terme), la fonction t^x étant intégrable sur $]0,1[$ pour $|x|<1$.

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$u(x)=-\int_0^1\frac{t^x}{1+t}dt.$$

On développe ensuite $t^x=\exp(\ln t)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\frac{(\ln t)^n}{n!}$. On a donc :

$$u(x)=-\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)}x^n\right)dt.$$

On permute, mais en sens contraire, l'intégrale et la série. Pour cela, on pose

$$g_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)}x^n.$$

- g_N converge simplement vers $\frac{t^x}{1+t}$.
- On a la majoration suivante :

$$\begin{aligned}|g_N(t)| &\leq \sum_{n=0}^{N}\frac{|\ln t|^n|x|^n}{n!(1+t)}\\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\ln t|^n|x|^n}{n!(1+t)}\\ &\leq \frac{1}{1+t}\exp(|x||\ln t|)\\ &\leq \frac{1}{(1+t)t^x}\end{aligned}$$

  et cette fonction est intégrable si $|x|<1$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et permuter la série et l'intégrale :

$$u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\int_0^1\frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)}dt\right)x^n$$

expression valable pour $|x|<1$. u est donc développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 18.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,
$$f(x) = f(x) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du.$$
On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du$.
2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1} R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

Correction.

1. Il s'agit simplement de la formule de Taylor avec reste intégral, après changement de variables.
2. On sait que f^{n+1} est croissante sur I puisque $f^{(n+2)} \geq 0$. On en déduit que, pour tout $u \in [0, 1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(\alpha u)$. Par intégration, on en déduit immédiatement le résultat demandé.
3. Il s'agit de démontrer que $R_n(x)$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, il suffit de démontrer que la suite $(R_n(\alpha))$ est bornée. Mais, en reprenant le résultat de la première question pour $x = \alpha$, et en observant que tous les termes apparaissant dans la somme sont positifs, on trouve que $R_n(\alpha) \leq f(\alpha)$. Et donc $(R_n(x))$ tend bien vers 0.

Exercice 19.

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n) ?
2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Correction.

1. D'après la formule du produit de Cauchy, on a
$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) \left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n = 1$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. La suite (b_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & \frac{1}{a_0} \\ b_n & = & \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \end{array} \right.$$

2. Soit $R > 0$ tel que $|a_n| \leq R^n$ pour $n \geq 1$, et on pose $C > 0$ suffisamment grand pour que

$$\sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{C^k} \leq |a_0|$$

On va prouver par récurrence sur n que $|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}$. C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$, alors

$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^n \frac{R^k}{C^k} \frac{C^n}{|a_0|} \leq \frac{C^n}{|a_0|} \times \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R^k}{C^k} \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

3. Soit $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Alors, par la formule sur le produit de Cauchy de deux séries entières et par définition de (b_n), on a $f(z)g(z) = 1$ dans un voisinage de 0. Autrement dit, $g = 1/f$ dans un voisinage de 0. $1/f$ est donc développable en série entière en 0.

Exercice 20.

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Méthode 1. On note $j = e^{2i\pi/3}$.
   (a) Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}$.
   (b) En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.
2. Méthode 2.
   (a) Former une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par S.
   (b) La résoudre.
   (c) Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n)!}$.

Correction.

1. (a) Il est facile de vérifier que $1 + j + j^2 = 0$, que $1 + j^2 + j^4 = 0$ et que $j^3 = 1$. On en déduit que
$$1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^r + j^{2r}$$
où r est le reste de k modulo 3. On en déduit que $1 + j^k + j^{2k} = 0$ sauf si k est multiple

de 3. Dans ce cas, la somme vaut 3. Il vient alors

$$e^x + e^{jx} + e^{j^2x} = \sum_{k\geq 0} \frac{1+j^k+j^{2k}}{k!} x^k = 3\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

(b) Écrivant

$$e^{jx} = \exp\big((-1+i\sqrt{3})x/2\big) = e^{-x/2}\big(\cos(x\sqrt{3}/2) + i\sin(x\sqrt{3}/2)\big)$$

et

$$e^{j^2x} = \exp\big((-1-i\sqrt{3})x/2\big) = e^{-x/2}\big(\cos(x\sqrt{3}/2) - i\sin(x\sqrt{3}/2)\big)$$

on en déduit

$$S(x) = \frac{e^x + 2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}.$$

La somme recherchée est donc

$$S(1) = \frac{e + 2e^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2)}{3}.$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \\ S''(x) &= \sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} \\ S^{(3)}(x) &= \sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = S(x). \end{aligned}$$

Ainsi, S est solution de l'équation $y^{(3)} - y = 0$.

(b) L'équation précédente est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^3 - 1 = 0$, qui admet pour racines $1, j, j^2$. Toute solution s'écrit donc $y(x) = ae^x + be^{jx} + ce^{j^2x}$.

(c) S est la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant $S(0) = 1$, $S'(0) = S''(0) = 0$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 1 \\ a+bj+cj^2 &=& 0 \\ a+bj^2+cj &=& 0 \end{array}\right.$$

d'où on tire $a = b = c = 1/3$. On a donc

$$S(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2x}\right) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

Exercice 21.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(x)dx$.
2. Démontrer que $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur $]0,1]$. En 0, on a $x^n \ln(x) = o(1/\sqrt{x})$ qui est intégrable au voisinage de 0. Donc $\int_0^1 x^n \ln(x)dx$ est convergente. Pour calculer cette intégrale, on réalise une intégration par parties :
$$\int_0^1 x^n \ln(x)dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n dx = \frac{-1}{(n+1)^2}.$$
2. Remarquons d'abord que l'intégrale est bien définie. En effet, la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et en 1. Par exemple, en 0, $\ln(x)\ln(1-x) \sim_0 -x\ln(x)$ et cette dernière fonction tend vers 0 quand x tend vers 0. D'autre part, on a
$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n}\ln(x)dx.$$
On va permuter la série et l'intégrale en utilisant le théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 \left|-\frac{x^n}{n}\ln(x)\right| dx = \frac{1}{n(n+1)^2},$$
et le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une série convergente. Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc
$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 -\frac{x^n}{n}\ln(x)dx.$$
Tenant compte du calcul effectué à la première question, on trouve bien le résultat voulu.

Exercice 22.

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,
$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

1. On suppose que la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif $r > 0$. Démontrer que, pout tout $x \in]-r,-r[$, on a $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.
2. En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour tout $x \in]-\rho,\rho[$, $x \neq 0$.
3. En développant en série entière la fonction précédente, calculer u_n en fonction de n.

Correction.

1. On introduit la série entière $f(x)=\sum_{n\geq 0}u_nx^n$. Supposons que son rayon de convergence soit $r>0$. Alors, faisant le produit de Cauchy des deux séries, on a, pour tout $x\in]-r,r[$,
$$f^2(x)=\sum_{n\geq 0}v_nx^n \text{ avec } v_n=\sum_{k=0}^n u_ku_{n-k}=u_{n+1}.$$
Autrement dit, on a
$$f^2(x)=\sum_{n\geq 0}u_{n+1}x^n=\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$
Pour chaque $x\in]-r,r[$, $f(x)$ vérifie donc l'équation
$$xf^2(x)-f(x)+1=0.$$

2. Il en résulte que, pour chaque $x\in]-r,r[$, on doit avoir
$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ ou } f(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}.$$
Or, f doit être continue en 0 avec $f(0)=1$. S'il existe une suite (x_n) tendant vers 0 pour laquelle $f(x_n)=\frac{1+\sqrt{1-4x_n}}{2x_n}$, alors $|f(x_n)|\to+\infty$, ce qui est contradictoire. Donc il existe $\rho>0$ tel que
$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour tout } x\in]-\rho,\rho[.$$

3. Réciproquement, soit $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$. On va prouver que f est développable en série entière au voisinage de 0. En effet, pour tout $x\in]-1/4,1/4[$, on a
$$\sqrt{1-4x}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\frac{x^n}{n!}.$$
On en déduit que, pour tout $x\in]-1/4,1/4[$, on a
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n.$$
Puisque f vérifie $xf^2(x)-f(x)+1=0$, le calcul effectué à la première question (ie le développement en série entière de xf^2-f+1) prouve que, en posant $a_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, $a_0=1$ et $a_{n+1}=\sum_{k=0}^n a_ka_{n-k}$. On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a
$$u_n=a_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$