Feuille d'exercices n°18

1. Espaces préhilbertiens

Exercice 1.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\big(\operatorname{tr}(AB)\big)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$ et que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$
et étudier les cas d'égalité.

Exercice 4.

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \operatorname{vect}(A)^\perp$;
4. $\operatorname{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\operatorname{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Exercice 5.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}.$$

$$F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}.$$

Que se passe-t-il en dimension finie ?

Exercice 6.

Soit E un espace euclidien de dimension n. On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. On note G l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire des formes linéaires).

1. Soit $a \neq 0_E$. Démontrer que $H_a = \{x \in E;\ \langle a, x\rangle = 0\}$ est un hyperplan de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Démontrer qu'il existe $a \in E,\ a \neq 0$, tel que $H = H_a$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \neq 0_E$ pour que $H_a = H_b$.
4. Pour $a \in E$, on note $\varphi_a(x) = \langle a, x\rangle$, de sorte que $\varphi_a \in G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_a = \varphi_b$.
5. En déduire que l'application de E dans G définie par $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
6. Application : démontrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\int_0^1 H_n(t)P(t)dt = 5P''(7) - 3P'(2) + 2P(\pi)$.

Exercice 7.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1,0,1),\ v = (1,1,1),\ w = (-1,-1,0).$$

Exercice 8.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.

2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance de $(1,1,1)$ à ce plan.

Exercice 11.

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Calculer explicitement L_0, L_1, L_2.
2. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
3. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

   Démontrer que φ est bien définie.
4. Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x).$$

   (b) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall p \in \{0, \ldots, n\},\ \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)dx.$$

7. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

Exercice 12.

Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^*)$. Déterminer $\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice 13.

Il est bien connu que si E est un espace préhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identité de la médiane (ou du parallélogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous x, y de E, on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque à cette propriété, à savoir le résultat suivant : si E est un espace vectoriel normé réel dont la norme vérifie l'identité de la médiane, alors E est nécessairement un espace préhilbertien, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur E tel que pour tout x de E, on a $(x,x) = \|x\|^2$. Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose :

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout x, y de E, on a $(x,y) = (y,x)$ et $(x,x) = \|x\|^2$.
2. Montrer que pour $x_1,\ x_2,\ y \in E$, on a $(x_1+x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$ (on utilisera l'identité de la médiane avec les paires (x_1+y, x_2+y) et (x_1-y, x_2-y)).
3. Montrer, en utilisant la question précédente,que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $(rx, y) = r(x,y)$. En utilisant un argument de continuité, montrer que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.
4. Conclure !

Exercice 14.

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u+v \perp u-v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle$.
3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple $(x,y) \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Démontrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Démontrer le sens réciproque.

Exercice 15.

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 16.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 17.

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que
$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de
$$A^T AX = A^T B.$$
3. Application : déterminer
$$\inf\{(x + y - 1)^2 + (x - y)^2 + (2x + y + 2)^2;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 18.

Soit $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, on pose
$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$$
dont on admettra qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

1. Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire pour tout $n \geq 1$, l'existence de a_n et b_n tels que
$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}.$$

Exercice 19.

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.

1. Existence et unicité
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme T à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n vérifiant la propriété $(\heartsuit)$:
   $$(\heartsuit) :\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
   (on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).
   (b) Démontrer qu'un polynôme vérifiant $(\heartsuit)$ est unique. On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n, on le note T_n.
2. On définit alors sur $[-1, 1]$ une fonction polynômiale par
$$\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

(b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.

(c) Quel est le degré de T_n ? Quel est le terme du coefficient de plus haut degré de T_n ?

3. Racines et extrema
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos\theta_k)$ où $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
   (b) On pose, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $c_k = \cos(k\pi/n)$. Calculer $\|T_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)|$, puis prouver que $|T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
4. Orthogonalité
   (a) Montrer que, pour toutes fonctions f, g dans E, l'application $t \mapsto \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
   (b) Pour f, g éléments de E, on pose $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Justifier que ceci définit un produit scalaire sur E.
   (c) Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.
5. Régularité et dérivée en 1.
   (a) Justifier que T_n est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.
   (b) Pour $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $T_n'(x)$.
   (c) Montrer que $\arccos(x) \sim \sqrt{2(1-x)}$ quand $x \to 1$ (on pourra utiliser un développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction cos). En déduire la valeur de $T_n'(1)$.

2. Endomorphismes symétriques

Exercice 20.

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Que dire de u ?

Exercice 21.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que vaut A ?

Exercice 22.

Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $P^T AP$ soit diagonale.

Exercice 23.

Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.

Soit $u : E \to E$ tel que, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Démontrer que u est linéaire.

Exercice 25.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice $A^T A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs.

Exercice 26.

Soient u, v deux endomorphismes symétrique d'un espace euclidien qui commutent, $u \circ v = v \circ u$.

1. Soit λ une valeur propre de u. On pose $F = \ker(u - \lambda Id_E)$. Démontrer que F et $F^{\perp}$ sont stables par v.
2. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de E diagonalisant simultanément u et v.

Exercice 27.

Soit H la matrice $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\dots,n}$, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1. Exprimer $\langle HX, X\rangle$ à l'aide d'une intégrale (on pourra remarquer que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 x^{i+j-2}dx$).
2. En déduire que la matrice H est définie positive.

Exercice 28.

Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit *positif* si pour tout x de E, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit *défini positif* si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient à $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.
2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On définit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i} x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \cdots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.
3. Soit w un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
   (a) Montrer que $wu = uw$.
   (b) En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
   (c) Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i. Vérifier que w_i est symétrique positif, puis diagonaliser w_i.
   (d) En déduire que $w = v$.
4. Soit $f \in GL(E)$.
   (a) Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle *décomposition polaire* de f.

Exercice 30.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit u un endomorphisme symétrique de E. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

1. Démontrer qu'il existe $x \in E$, x non-nul, tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Exercice 31.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes antisymétriques.

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\langle x, u(x) \rangle = 0$.
2. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale est antisymétrique.
3. On fixe pour la suite de l'exercice un endomorphisme antisymétrique $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Im}(u) = (\ker u)^\perp$.
4. Soit F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $F^\perp$ est stable par u.
5. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2)$.

6. Démontrer que le spectre de u est soit vide, soit restreint à $\{0\}$.
7. Montrer que u^2 est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.
8. Soit F un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(F)$ antisymétrique tel que $v^2 = -\alpha^2 Id_F$, où $\alpha > 0$. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de F telle que la matrice de v dans cette base soit de la forme
$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} J(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\alpha) \end{pmatrix}$$
où
$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$
9. En déduire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a pour forme
$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\alpha_2) & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A(\alpha_r) & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Endomorphismes orthogonaux

Exercice 32.

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Exercice 33.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$, et
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

Exercice 34.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. On considère l'endorphisme de E défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

Exercice 35.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $a \in E\backslash\{0\}$. On pose

$$s_a(x) = x - 2\frac{(a,x)}{(a,a)}a,$$

Montrer s_a est un endomorphisme orthogonal. Calculer $\ker(s_a - id)$, $\ker(s_a + id)$. Décrire alors géométriquement s_a.

Exercice 36.

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, et soient u et v deux vecteurs unitaires de E. Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient u sur v.

Exercice 37.

On considère la matrice $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

Exercice 38.

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39.

Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique usuelle d'espace euclidien orienté. La base canonique est noté $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le vecteur $(1,1,1) = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ est noté $\vec{v}$. Dans cet exercice, on souhaite calculer la matrice M dans la base canonique de la rotation r d'axe $\mathbb{R}\vec{v}$ et d'angle $2\pi/3$.

1. Méthode 1 : en étudiant la restriction de r au plan affine P d'équation $x+y+z=1$, déterminer la matrice M.

2. Méthode 2 : En utilisant la matrice de r dans une base orthonormée directe donc le premier vecteur est le vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}$, déterminer M.

Exercice 41.

Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 42.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soit $f \in O^-(E)$. Démontrer que f est la composée d'une rotation d'axe une droite D et de la réflexion par rapport à $D^\perp$.

Exercice 43.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x, y \in E$,

$$\langle x, y\rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y)\rangle = 0.$$

1. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$ (on pourra considérer une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E et les vecteurs $e_1 + e_i$, $e_1 - e_i$).
2. En déduire que u est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

Exercice 44.

Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Démontrer que $u(F^\perp) = \left[u(F)\right]^\perp$.
2. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. Démontrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

Exercice 45.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 46.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in O(E)$. On pose $v = u - Id$.

1. Démontrer que $\ker(v) = (\mathrm{Im} v)^{\perp}$. En déduire que $\ker(v)^{\perp} = \mathrm{Im}(v)$.
2. Soit
$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$
Démontrer que pour tout $x \in E$, $(u_n(x))$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker v$.