Corrigé de la feuille d'exercices n°18

1. Espaces préhilbertiens

Exercice 1.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\big(\mathrm{tr}(AB)\big)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Correction.

1. Il est très facile de vérifie que $\langle ., .\rangle$ définit une forme bilinéaire symétrique. Reste à démontrer qu'elle est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $(b_{i,j}) = A^T A$. Alors
$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$
Ainsi,
$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0.$$
On a bien affaire à une forme positive. De plus, si $\langle A, A\rangle = 0$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $k = 1, \dots, n$, on a $a_{k,i} = 0$, et donc $A = 0$: la forme est définie.
2. On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour A, B symétriques, on a en effet
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$$
et donc
$$\big(\mathrm{tr}(AB)\big)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction.

Remarquons que, puisque tout est positif, l'inégalité est équivalente à $\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$. Or,
$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

et donc l'inégalité est équivalente à

$$2\lambda\langle x,y\rangle+\lambda^2\|y\|^2\geq 0.$$

Supposons d'abord que x est orthogonal à y, et donc que $\langle x,y\rangle=0$. Alors l'inégalité précédente est bien vérifiée pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Réciproquement, supposons que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$2\lambda\langle x,y\rangle+\lambda^2\|y\|^2\geq 0\iff\lambda(2\langle x,y\rangle+\lambda\|y\|)\geq 0.$$

Dressant le tableau de signes de ce produit, il ne peut être toujours positif que si $2\langle x,y\rangle+\lambda\|y\|$ est toujours nul, c'est-à-dire si $y=0$, ou si $2\langle x,y\rangle+\lambda\|y\|$ ne s'annule qu'en 0, c'est-à-dire si $\langle x,y\rangle=0$. Dans les deux cas, on trouve bien que x et y sont orthogonaux.

Exercice 3.

Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2\leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose en outre que $x_k>0$ pour chaque $k\in\{1,\dots,n\}$ et que $x_1+\dots+x_n=1$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}\geq n^2$$
et étudier les cas d'égalité.

Correction.

1. On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ avec les vecteurs $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(1,\dots,1)$. On trouve
$$\sum_{k=1}^n x_ky_k=\sum_{k=1}^n x_k\leq\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n 1^2\right)^{1/2}.$$
Prenant le carré de cette inégalité, on obtient l'inégalité désirée. De plus, il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ et $(1,\dots,1)$ sont liés ; autrement dit, si et seulement si tous les x_i sont égaux.
2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $y=(\sqrt{x_1},\dots,\sqrt{x_n})$ et $z=\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$. Alors on trouve
$$n=\sum_{k=1}^n y_kz_k\leq\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}\right)^{1/2}$$
ce qui, mis au carré, donne l'inégalité demandé. Comme précédemment, on a égalité si et seulement si les vecteurs y et z sont liés. Puisqu'ils sont tous les deux à coordonnées

strictement positives, c'est équivalent à dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $x_k = \frac{\lambda}{x_k}$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Ainsi, tous les x_k sont égaux et de la relation $x_1 + \cdots + x_n = 1$, on tire $x_k = \frac{1}{n}$. Ainsi, il y a égalité si et seulement si $x_k = \frac{1}{n}$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Exercice 4.

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp$;
4. $\mathrm{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Correction.

1. Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in A^\perp$.
2. On commence par prendre $x \in (A \cup B)^\perp$, et prouvons que $x \in A^\perp$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in A \cup B$, et donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci montre la première inclusion. Réciproquement, si $x \in A^\perp \cap B^\perp$, prenons $y \in (A \cup B)$. Alors si $y \in A$, on a bien $\langle x, y\rangle = 0$ puisque $x \in A^\perp$, et le cas où $y \in B$ se résout de la même façon.
3. D'après la première question, puisque $A \subset \mathrm{vect}(A)$, on a
$$\mathrm{vect}(A)^\perp \subset A^\perp.$$
Réciproquement, si $y \in A^\perp$, prenons $x \in \mathrm{vect}(A)$. Alors on peut trouver des éléments $a_1, \dots, a_n$ de A et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que
$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \langle y, \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\rangle \\ &= \lambda_1\langle y, a_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle y, a_n\rangle \\ &= \lambda_1 0 + \cdots + \lambda_n 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$
et donc $y \in \mathrm{vect}(A)^\perp$.
4. On va commencer par prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Mais, soit $x \in A$. Choisissons $y \in A^\perp$. On a alors $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $x \in A^{\perp\perp}$. D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par A et on a bien l'inclusion demandée.
5. Notons $B = \mathrm{vect}(A)$ et $n = \dim(E)$. Alors d'après la question précédente,
$$(A^\perp)^\perp = (B^\perp)^\perp.$$

D'autre part,

$$\dim(B^\perp) = n - \dim B \implies \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp) = \dim(B).$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a $B \subset (B^\perp)^\perp$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension. Ils sont donc égaux !

Exercice 5.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

$$F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp.$$

Que se passe-t-il en dimension finie ?

Correction.

On remarque d'abord que si $A \subset B$, alors on a $B^\perp \subset A^\perp$, ce qui est immédiat en appliquant la définition. Ainsi, puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on obtient $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Prenons maintenant $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Tout $z \in F+G$ s'écrit $z = f+g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors :

$$(x,z) = (x,f) + (x,g) = 0,$$

ce qui prouve que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$. D'autre part, on a $F\cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, ce qui donne respectivement $F^\perp \subset (F\cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Puisque $(F\cap G)^\perp$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition, et donc on a $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. Dans le cas où E est un espace de dimension finie, on peut obtenir l'autre inclusion en comparant les dimensions des sous-espaces :

$$\begin{array}{rcl}\dim(F^\perp + G^\perp) & = & \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp)\\ & = & \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F+G)^\perp\\ & = & \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F+G)\\ & = & \dim(E) - \dim(F\cap G)\\ & = & \dim((F\cap G)^\perp).\end{array}$$

Exercice 6.

Soit E un espace euclidien de dimension n. On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. On note G l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire des formes linéaires).

1. Soit $a \neq 0_E$. Démontrer que $H_a = \{x \in E;\ \langle a, x\rangle = 0\}$ est un hyperplan de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Démontrer qu'il existe $a \in E,\ a \neq 0$, tel que $H = H_a$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \neq 0_E$ pour que $H_a = H_b$.
4. Pour $a \in E$, on note $\varphi_a(x) = \langle a, x\rangle$, de sorte que $\varphi_a \in G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_a = \varphi_b$.

5. En déduire que l'application de E dans G définie par $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
6. Application : démontrer qu'il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\int_0^1 H_n(t)P(t)dt = 5P''(7) - 3P'(2) + 2P(\pi)$.

Correction.

1. On vérifie aisément que H_a est un sous-espace vectoriel, et plus précisément que $H_a = (\mathrm{vect}(a))^\perp$. On a donc bien $\dim(H_a) = n - \dim(\mathrm{vect}(a)) = n - 1$.
2. Le sous-espace vectoriel $H^\perp$ de E est de dimension 1. Il est donc engendré par un vecteur $a \neq 0$. On a alors :
$$x \in H_a \iff \langle a, x\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{vect}(a))^\perp \iff x \in (H^\perp)^\perp \iff x \in H.$$
3. On a observé que $(H_a)^\perp = \mathrm{vect}(a)$. On a donc
$$H_a = H_b \iff (H_a)^\perp = (H_b)^\perp \iff \mathrm{vect}(a) = \mathrm{vect}(b).$$
Ceci est équivalent à dire que la famille (a, b) est liée.
4. Si $\varphi_a = \varphi_b$, alors ces deux applications linéaires ont le même noyau et donc $H_a = H_b$. Ceci entraîne que (a, b) est lié. Supposons par exemple $a \neq 0$ (si les deux sont nuls, $\varphi_a = \varphi_b$) et écrivons $b = \lambda a$. Alors
$$\|a\|^2 = \varphi_a(a) = \varphi_b(a) = \lambda\|a\|^2$$
et donc $\lambda = 1$. Donc $\varphi_a = \varphi_b$ si et seulement si $a = b$.
5. Il faut d'abord vérifier que c'est un morphisme d'espace vectoriels (facile). La question précédente nous dit que c'est un isomorphisme. Puisque $\dim(G) = \dim(E) = n$, on a bien affaire à un isomorphisme d'espaces vectoriels.
6. On définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. De plus, $P \mapsto 5P''(7) - 3P'(2) + 2P(\pi)$ est une forme linéaire sur E. La question précédente nous donne immédiatement l'existence de H_n.

Exercice 7.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :
$$u = (1, 0, 1),\ v = (1, 1, 1),\ w = (-1, -1, 0).$$

Correction.

Le premier vecteur est simplement $\frac{u}{\|u\|}$. Puisque $\|u\| = \sqrt{2}$, on a
$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Cherchons ensuite e_2' sous la forme $e_2' = v + \lambda e_1$ de sorte que $\langle e_2', e_1\rangle = 0$. On a

$$\begin{array}{rcl}\langle e_2', e_1\rangle & = & \langle v, e_1\rangle + \lambda\langle e_1, e_1\rangle \\ & = & \dfrac{2}{\sqrt{2}} + \lambda \\ & = & \sqrt{2} + \lambda.\end{array}$$

On doit donc avoir $\lambda = -\sqrt{2}$ ce qui donne

$$e_2' = (0, 1, 0).$$

Il est déjà normalisé et donc on pose $e_2 = (0, 1, 0)$. Cherchons ensuite e_3' sous la forme

$$e_3' = w + \lambda e_1 + \mu e_2$$

de sorte que $\langle e_3', e_1\rangle = 0$ et $\langle e_3', e_2\rangle = 0$. Il vient :

$$\begin{array}{rcl}\langle e_3', e_1\rangle & = & \langle w, e_1\rangle + \lambda\langle e_1, e_1\rangle \\ & = & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \lambda\end{array}$$

d'où il vient $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, on a

$$\begin{array}{rcl}\langle e_3', e_2\rangle & = & \langle w, e_2\rangle + \mu\langle e_2, e_2\rangle \\ & = & -1 + \mu\end{array}$$

d'où $\mu = 1$. On en déduit que

$$e_3' = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

On normalise ce vecteur, et on trouve

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Exercice 8.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Correction.

On va orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$. Commençons par normaliser 1. Sa norme est $\sqrt{2}$. On pose donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Considérons ensuite

$$Q_1(X) = X + \lambda P$$

où λ est choisi de sorte que $\langle Q_1, P\rangle = 0$. Mais,

$$\langle Q_1, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}} dt + \lambda \langle P, P\rangle = \lambda.$$

On doit donc avoir $\lambda = 0$ (en réalité, les deux vecteurs 1 et X sont déjà orthogonaux !), et donc $Q_1 = X$. On normalise ce vecteur en

$$Q(X) = \sqrt{\frac{3}{2}} X.$$

On pose enfin

$$R_1 = X^2 + \lambda P + \mu Q$$

de sorte que $\langle R_1, P\rangle = 0$ et $\langle R_1, Q\rangle = 0$. Mais, X^2 est déjà orthogonal à X, et donc par un calcul similaire au précédent, on va trouver que $\mu = 0$. D'autre part,

$$\langle R_1, P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2 dt + \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3} + \lambda.$$

On trouve $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et donc

$$R_1(X) = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Reste à normaliser ce vecteur en

$$R(X) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3X^2 - 1).$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}} X, \sqrt{\frac{5}{8}} (3X^2 - 1)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Correction.

1. On commence par trouver une base de G. Mais on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & = & 0 \\ x_3+x_4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & -x_1 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & -x_3. \end{array}\right.$$

   On en déduit que (e_1-e_2, e_3-e_4) est une base de G. Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux, il suffit de les normaliser. Si on pose $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3-e_4)$, alors (u_1,u_2) est une base orthonormale de G.
2. On va calculer $p_G(e_i)$ par la formule

$$p_G(e_i)=\langle e_i,u_1\rangle u_1+\langle e_i,u_2\rangle u_2.$$

   On en déduit que la matrice de p_G dans la base canonique est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On sait que $d(x,G)=\|x-p_G(x)\|$. Écrivons $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Alors

$$p_G(x)=\frac{1}{2}(x_1-x_2,-x_1+x_2,x_3-x_4,-x_3+x_4)$$

   et donc

$$x-p_G(x)=\frac{1}{2}(x_1+x_2,x_1+x_2,x_3+x_4,x_3+x_4).$$

   Il vient

$$d(x,G)^2=\frac{1}{2}\left((x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2\right).$$

Exercice 10.

Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance de $(1,1,1)$ à ce plan.

Correction.

On commence par remarquer que $A^2=A$. Ainsi, p est bien une projection. On va calculer $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. Il suffira ensuite de démontrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour pouvoir conclure. On remarque d'abord que $(x, y, z) \in \ker(p)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-2y+z &=& 0 \\ -2x+2y+2z &=& 0 \\ x+2y+5z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+5z &=& 0 \\ 6y+12z &=& 0 \\ -12y-24z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -2z \\ z &=& z \end{array}\right.$$

Ainsi, $\ker(p) = \mathrm{vect}(u)$, où $u = (-1, -2, 1)$. On en déduit (on sait déjà que p est une projection) que $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension 2. Puisque $p(e_1)$ et $p(e_2)$ sont indépendants, en posant $v = (5, -2, 1)$ et $w = (-2, 2, 2)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}(v, w)$. Pour démontrer que p est une projection orthogonale, il reste à prouver que $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$. Mais $u \perp v$ et $u \perp w$, donc on a bien $\mathrm{vect}(u) \perp \mathrm{vect}(v, w)$. Puisque u est un vecteur normal au plan $\mathrm{Im}(p)$, une équation de ce plan est

$$-x - 2y + z = 0.$$

Enfin, on calcule la distance de $(1, 1, 1)$ au plan $\mathrm{Im}(p)$ par la formule du cours :

$$d = \frac{|\langle u, (1,1,1)\rangle|}{\|u\|} = \frac{|-1-2+1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 11.

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Calculer explicitement L_0, L_1, L_2.
2. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
3. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

   Démontrer que φ est bien définie.
4. Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x).$$

   (b) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall p \in \{0, \dots, n\},\ \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)dx.$$

7. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

Correction.

1. C'est du calcul ! $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$.
2. La clé est d'appliquer la formule de Leibniz (mais qu'est-ce que c'est que cela ???) pour calculer la dérivée n-ième du produit $x^n e^{-x}$. On en déduit que $h_n^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $P(x)e^{-x}$ où P est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$, et on a presque gagné...
3. Pour prouver que φ est bien définie, on commence par remarquer que la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. D'autre part, par comparaison des fonctions exponentielle et polynômes, on sait que $\lim_{x\to+\infty} x^2 P(x)Q(x)e^{-x} = 0$. Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison, $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc $\varphi(P, Q)$ est bien défini, pour tout couple de polynômes P, Q.
4. Démontrer que φ est une forme bilinéaire symétrique ne pose aucun problème. La vraie difficulté de cette question est de démontrer que si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P = 0$. On va pour cela utiliser le théorème suivant : soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, intégrable et positive. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 0$. Alors f est identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. Dans notre contexte, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$. On applique le théorème précédent à $f(t) = P^2(t)e^{-t}$. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule jamais, on en déduit que $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul...
5. On a vu que $L_0 = 1$. Il s'agit de prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\phi(L_0, X^n) = n!$. C'est vrai si $n = 0$. Si la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\varphi(L_0, X^{n+1}) = \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\varphi(L_0, X^n),$$

l'intégration par parties étant justifiée par la convergence des deux intégrales, et par l'existence de la limite en $+\infty$ de $x^{n+1}e^{-x}$ (c'est zéro). De

$$\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0,$$

on tire

$$\varphi(L_0, X^{n+1}) = (n+1)\varphi(L_0, X^n) = (n+1)!$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$. Par application de l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
6. (a) Il s'agit (encore une fois !) de la formule de Leibniz à appliquer correctement ! En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (e^{-x})^{(j)}(x^n)^{(k-j)}.$$

Or,

$$(e^{-x})^{(j)} = (-1)^j e^{-x},$$

et

$$(x^n)^{(k-j)} = n(n-1)\dots(n-k+j+1)x^{n-k+j} = x^{n-k}R_{n,j,k}(x)$$

où $R_{n,j,k}$ est un polynôme (et même un monôme...). En sommant tout cela, on trouve

$$h_n^{(k)}(x) = e^{-x}x^{n-k}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j R_{n,j,k}(x)$$

ce qui est le résultat voulu en posant

$$Q_k(x)=\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(-1)^j R_{n,j,k}(x).$$

(b) On fixe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, on fixe un entier $n\in\mathbb{N}$, et on prouve par récurrence finie sur $p\in\{0,\dots,n\}$ la propriété suivante :

$$H_p:\varphi(L_n,P)=\frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)dx.$$

H_0 est vraie : il suffit de remplacer L_n par sa définition. Soit $p\leq n-1$ tel que H_p est vraie, et prouvons H_{p+1}. Il s'agit juste de faire une intégration par parties ; le fait que tout se passe bien avec la borne $+\infty$ est une conséquence du résultat de la question précédente. Précisément, soit $a>0$. Alors, par intégration par parties :

$$\int_0^a h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)dx=P^{(p)}(a)h^{(n-(p+1))}(a)-P^{(p)}(0)h^{(n-(p+1))}(0)-\int_0^a h_n^{(n-(p+1))}(x)P^{(p+1)}(x)dx.$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, puisque $n-(p+1)<n$, $h^{(n-(p+1)}(0)=0$. D'autre part, toujours d'après la question précédente,

$$P^{(p)}(x)h^{(n-(p+1))}(x)=e^{-x}R(x),$$

où R est un polynôme. Ainsi,

$$\lim_{a\to+\infty}P^{(p)}(a)h^{(n-(p+1))}(a)=0.$$

Le même argument démontre que la fonction $x\mapsto h_n^{(n-(p+1))}(x)P^{(p+1)}(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty]$. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$, et on trouve que

$$\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)dx=-\int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x)P^{(p+1)}(x)dx,$$

ce qui, à son tour, entraîne que H_{p+1} est vraie.

7. On va d'abord prouver que c'est une famille orthogonale. Le résultat de la question précédente, appliqué avec $p=n$, prouve que L_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur strict à n. En particulier, puisque L_m est de degré m, $L_n\perp L_m$ si $m<n$. On a bien une famille orthogonale. De plus, on a, toujours d'après la même formule,

$$\varphi(L_n,L_n)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)L_n^{(n)}(x)dx.$$

On a déjà vu que L_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n/n!$. Il vient $L_n^{(n)}(x)=(-1)^n$, et donc

$$\varphi(L_n,L_n)=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)dx=\frac{1}{n!}\varphi(L_0,X^n)=1.$$

La famille (L_n) est bien une famille orthonormée.

Exercice 12.

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^*)$. Déterminer $\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Correction.

Utilisons le produit scalaire canonique sur $F = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b fg.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire avec le produit $\sqrt{f}\times\frac{1}{\sqrt{f}}$. On obtient

$$b-a = \int_a^b \sqrt{f}\times\frac{1}{\sqrt{f}} \leq \left(\int_a^b f\right)^{1/2} \times \left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)^{1/2}.$$

Prenant le carré, on trouve que, pour tout $f\in E$,

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}.$$

De plus, pour $f=1$, qui est élément de E, on a clairement égalité. Ainsi, la borne inférieure recherchée vaut $(b-a)^2$ et est atteinte par la fonction identiquement égale à 1 (plus généralement, par les fonctions constantes).

Exercice 13.

Il est bien connu que si E est un espace préhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identité de la médiane (ou du parallélogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous x,y de E, on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque à cette propriété, à savoir le résultat suivant : si E est un espace vectoriel normé réel dont la norme vérifie l'identité de la médiane, alors E est nécessairement un espace préhilbertien, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur E tel que pour tout x de E, on a $(x,x)=\|x\|^2$. Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose :

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout x,y de E, on a $(x,y)=(y,x)$ et $(x,x)=\|x\|^2$.
2. Montrer que pour $x_1,\ x_2,\ y\in E$, on a $(x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y)=0$ (on utilisera l'identité de la médiane avec les paires (x_1+y,x_2+y) et (x_1-y,x_2-y)).
3. Montrer, en utilisant la question précédente,que si $x,y\in E$ et $r\in\mathbb{Q}$, on a $(rx,y)=r(x,y)$. En utilisant un argument de continuité, montrer que c'est encore vrai pour $r\in\mathbb{R}$.
4. Conclure !

Correction.

1. C'est une vérification immédiate !
2. On utilise l'identité de la médiane comme elle est indiquée :

$$\|x_1+x_2+2y\|^2+\|x_1-x_2\|^2=2\|x_1+y\|^2+2\|x_2+y\|^2,$$

$$\|x_1+x_2-2y\|^2+\|x_1-x_2\|^2=2\|x_1-y\|^2+2\|x_2-y\|^2.$$

D'autre part, par définition du produit scalaire

$$(x_1+x_2,y)=\frac{1}{4}\left(\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2\right),$$

et

$$(x_1,y)+(x_2,y)=\frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2-\|x_1-y\|^2-\|x_2-y\|^2\right)$$

ce qui donne en utilisant l'identité de la médiane :

$$(x_1,y)+(x_2,y)=\frac{1}{8}\left(\|x_1+x_2+2y\|^2-\|x_1+x_2-2y\|^2\right).$$

Pour remonter à (x_1+x_2,y), il faut encore transformer $\|x_1+x_2+2y\|^2$ et on utilise pour cela encore une fois l'identité de la médiane, en écrivant $(x_1+x_2+2y)=(x_1+x_2+y)+y$. Il vient :

$$\|x_1+x_2+2y\|^2=2\|x_1+x_2+y\|^2+2\|y\|^2-\|x_1+x_2\|^2,$$

$$\|x_1+x_2-2y\|^2=2\|x_1+x_2-y\|^2+2\|y\|^2-\|x_1+x_2\|^2.$$

On obtient bien le résultat !
3. D'abord, par une récurrence immédiate, le résultat est vrai si $r\in\mathbb{N}$. Prouvons maintenant que $(-x,y)=-(x,y)$. On a en effet $(x-x,y)=(x,y)+(-x,y)=0$, ce qui prouve le résultat ! Ceci donne le résultat pour $r\in\mathbb{Z}$. Enfin, si $r=p/q$, on pose $x_1=\frac{x}{q}$. On obtient $(\frac{p}{q}x,y)=p\left(\frac{1}{q}x,y\right)$. D'autre part, en posant $x_1=\frac{1}{q}x$, on a $q(x_1,y)=(qx_1,y)=(x,y)$. Ceci donne

$$(\frac{p}{q}x,y)=\frac{p}{q}(x,y).$$

Le résultat est donc vrai si $r\in\mathbb{Q}$. Enfin, par composée d'applications continues, pour x et y fixés, les applications $\lambda\mapsto(\lambda x,y)$ et $\lambda\mapsto\lambda(x,y)$ sont continues, et sont égales sur une partie dense de $\mathbb{R}$. Elles sont donc partout égales.
4. D'après les questions précédentes, $(.,.)$ est un produit scalaire sur E, et on a bien $\|x\|^2=(x,x)$.

Exercice 14.

Soit E un espace euclidien, $f\in\mathcal{L}(E)$ et $\lambda>0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|=\lambda\|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u,v\in E$ tels que $u+v\perp u-v$. Démontrer que $\|u\|=\|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x,y\in E$, $\langle f(x),f(y)\rangle=\lambda^2\langle x,y\rangle$.
3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple $(x,y)\in E$, si $x\perp y$, alors $f(x)\perp f(y)$.

(a) Prouver le sens direct.

(b) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. Démontrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\|=\|f(e_j)\|$.

(c) Démontrer le sens réciproque.

Correction.

1. On va utiliser la formule de polarisation
$$\langle x,y\rangle=\frac14\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).$$
Si on applique cette formule à $x=u+v$ et $y=u-v$, x et y sont orthogonaux et on trouve $\|u\|=\|v\|$.

2. Bien sûr, le sens réciproque est trivial puisqu'il suffit de choisir $x=y$. Réciproquement, supposons que pour tout $x\in E$, on a $\|f(x)\|=\lambda x$. Alors, par la formule de polarisation rappelée ci-dessus qu'on utilise deux fois :
$$\begin{aligned}\langle f(x),f(y)\rangle &= \frac14\left(\|f(x+y)\|^2-\|f(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac14\left(\lambda^2\|x+y\|^2-\lambda^2\|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{\lambda^2}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\\ &= \lambda^2\langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

3. (a) C'est trivial d'après la question précédente.

(b) On sait que $e_i+e_j\perp e_i-e_j$. Puisque f préserve l'orthogonalité, $f(e_i)+f(e_j)\perp f(e_i)-f(e_j)$. Et d'après la première question, $\|f(e_i)\|=\|f(e_j)\|$.

(c) Soit $\lambda>0$ tel que $\|f(e_i)\|=\lambda\|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i d'après la question précédente, et est strictement positif sinon f serait nulle). On va démontrer que f est une similitude de rapport λ. Soit $x\in E$ qui s'écrit
$$x=\sum_{i=1}^n x_ie_i.$$
Alors
$$f(x)=\sum_{i=1}^n x_if(e_i).$$
La famille $(f(e_i))$ étant orthogonale, on a
$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2\|f(e_i)\|^2\\ &= \lambda^2\sum_{i=1}^n|x_i|^2\\ &= \lambda^2\|x\|^2.\end{aligned}$$
f est bien une similitude de rapport λ.

Exercice 15.

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx$.

Correction.

Posons $E=\mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$. On a $\int_0^1 |x^2-ax-b|^2dx = \|x^2-(ax+b)\|^2$. Quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, $ax+b$ décrit $F=\mathrm{vect}(1,x)$ et donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 |x^2-ax-b|^2dx = \inf_{f\in F}\|x^2-f\|^2.$$

Mais on sait que

$$\inf_{f\in F}\|x^2-f\| = \|x^2-p(x^2)\|$$

où $p(x^2)$ est la projection orthogonale de x^2 sur F. Il s'agit donc de calculer cette projection. Ceci peut se faire de deux façons. D'une part, on peut fabriquer une base orthonormale de F par le procédé de Gram-Schmidt à partir de $1,x$ et on sait que

$$p(x^2)=(x^2|e_1)e_1+(x^2|e_2)e_2.$$

On peut aussi poser a priori $p(x^2)=ax+b$ et écrire que $x^2-(ax+b)\perp 1$, $x^2-(ax+b)\perp x$. On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int_0^1 x^2-(ax+b)dx & = & 0\\ \int_0^1 x^3-(ax^2+bx)dx & = & 0\end{array}\right.$$

qui permet de calculer a et b. Par l'une ou l'autre méthode, on trouve que $p(x^2)=x-1/6$ et donc que $\|x^2-p(x^2)\|=\frac{1}{\sqrt{180}}$.

Exercice 16.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $\|p(x)\|\leq\|x\|$.

Correction.

Supposons d'abord que p est un projecteur orthogonal. Pour tout x de E, $x=p(x)+(x-p(x))$, où $p(x)\perp x-p(x)$. Le théorème de Pythagore donne alors $\|x\|^2=\|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2$, ce qui entraîne $\|p(x)\|\leq\|x\|$ pour tout x de E. Réciproquement, supposons que pour tout x de E, $\|p(x)\|\leq\|x\|$, et supposons que p est le projecteur sur F parallèlement à G. Prenons x dans F, et y dans G, et posons $f(t)=\|x+ty\|^2$. Le développement de la norme donne :

$$f(t)=\|x\|^2+2t(x,y)+t^2\|y\|^2.$$

f est donc une fonction dérivable. En outre, $p(x+ty)=x$, et donc $f(0)=\|x\|^2\leq\|x+ty\|^2\leq f(t)$. f atteint donc son minimum en 0. On a donc $f'(0)=0$, ce qui donne $(x,y)=0$: F et G sont orthogonaux, ce qui signifie que p est un projecteur orthogonal !

Exercice 17.

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que
$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de
$$A^T AX = A^T B.$$
3. Application : déterminer
$$\inf\{(x + y - 1)^2 + (x - y)^2 + (2x + y + 2)^2;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Correction.

1. Puisque A est de rang p, l'application $X \mapsto AX$ qui va de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Im}(A)$ est injective. Or, $\inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$ est la distance de B à $\mathrm{Im}(A)$. Cette distance est atteinte uniquement au projeté orthogonal sur $\mathrm{Im}(A)$ (qui est de dimension finie) de B. Ce projeté orthogonal s'écrit de façon unique AX_0.
2. On a
$$\begin{aligned} AX_0 = p_{\mathrm{Im}(A)}(B) &\iff \forall Z \in \mathrm{Im}(A),\ AX_0 - B \perp Z \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX_0 - B \perp AX \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ (AX)^T(AX_0 - B) = 0 \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ X^T(A^T AX_0 - A^T B) = 0 \\ &\iff A^T AX_0 = A^T B. \end{aligned}$$
X_0 est donc bien l'unique solution de $A^T AX = A^T B$.
3. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que le rang de A est 2. La borne inférieure est donc atteinte en $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ solution de $A^T AX_0 = A^T B$.. Or
$$A^T AX_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ A^T B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
On vérifie que $x_0 = -1/2$ et $y_0 = 0$, et donc l'inf recherché vaut $7/2$.

Exercice 18.

Soit $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, on pose
$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$$
dont on admettra qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

1. Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire pour tout $n \geq 1$, l'existence de a_n et b_n tels que

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}.$$

Correction.

1. Pour démontrer cette propriété, on peut suivre (au moins) deux voies. La première consiste à partir de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la famille (X^n) et de voir comment en déduire la famille demandée. La seconde consiste à imiter le procédé de Gram-Schmidt pour l'adapter à ces nouvelles contraintes. On va suivre cette deuxième méthode en démontrant par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : il existe une unique suite $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ de polynômes deux à deux orthogonaux tels que chaque P_k est de degré k et est unitaire, pour $0 \leq k \leq n$. Pour $n = 0$, il est clair que le seul polynôme qui convient est $P_0 = 1$. Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons la au rang $n + 1$. Les polynômes $P_0, \dots, P_n$ ont déjà été construits de façon unique. P_{n+1}, s'il existe, ne peut s'écrire que $P_{n+1} = X^{n+1} + Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (famille de polynômes à degrés étagés), Q s'écrit $Q = a_0P_0 + \dots + a_nP_n$. Maintenant, pour $k = 0, \dots, n$, P_{n+1} va être orthogonal à P_k si et seulement si

$$\langle X^{n+1}, P_k\rangle + a_k\langle P_k, P_k\rangle = 0 \implies a_k = -\frac{\langle X^{n+1}, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle}.$$

Ceci détermine donc de façon unique le polynôme P_{n+1} ce qui achève la récurrence.
2. Prenons $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Alors il est clair que P_{n+1} est orthogonal à Q puisque Q est combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_{n-2}$. D'autre part, on a également la formule "miracle" suivante :

$$\langle XP_n, Q\rangle = \langle P_n, XQ\rangle$$

qui vient de la définition du produit scalaire. Puisque XQ est de degré au plus $n - 1$ et que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en déduit que l'on a également $XP_n \perp Q$, et donc finalement $P_{n+1} - XP_n \perp Q$.
3. Par simplification des termes de plus haut degré, $P_{n+1} - XP_n$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Il s'écrit donc $c_0P_0 + \dots + c_nP_n$. Mais il est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, donc orthogonal à $P_0, \dots, P_{n-2}$. On en déduit que $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-2} = 0$, et donc que

$$P_{n+1} - XP_n = c_{n-1}P_{n-1} + c_nP_n$$

ce qui est bien le résultat attendu.

Exercice 19.

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.

1. Existence et unicité
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme T à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n vérifiant la propriété $(\heartsuit)$:
   $$(\heartsuit): \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
   (on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).
   (b) Démontrer qu'un polynôme vérifiant $(\heartsuit)$ est unique. On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n, on le note T_n.
2. On définit alors sur $[-1,1]$ une fonction polynômiale par
   $$\forall x \in [-1,1], \ T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, on a
   $$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$
   (b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.
   (c) Quel est le degré de T_n ? Quel est le terme du coefficient de plus haut degré de T_n ?
3. Racines et extrema
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x - \cos\theta_k)$ où $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
   (b) On pose, pour $k \in \{0,\dots,n\}$, $c_k = \cos(k\pi/n)$. Calculer $\|T_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|$, puis prouver que $|T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$.
4. Orthogonalité
   (a) Montrer que, pour toutes fonctions f,g dans E, l'application $t \mapsto \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.
   (b) Pour f,g éléments de E, on pose $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Justifier que ceci définit un produit scalaire sur E.
   (c) Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$ pour tout $n,m \in \mathbb{N}$.
5. Régularité et dérivée en 1.
   (a) Justifier que T_n est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.
   (b) Pour $x \in]-1,1[$, donner une expression simple de $T_n'(x)$.
   (c) Montrer que $\arccos(x) \sim \sqrt{2(1-x)}$ quand $x \to 1$ (on pourra utiliser un développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction cos). En déduire la valeur de $T_n'(1)$.

Correction.

1. (a) D'après la formule du binôme de Newton, on a
   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k\theta i^{n-k}\sin^{n-k}\theta.$$

La partie réelle correspond aux entiers k pour lesquels $n-k$ est pair. On a donc :

$$\cos(n\theta) = \Re\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \sum_{k=0,\ n-k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} \cos^k \theta i^{n-k} \sin^{n-k}(\theta).$$

Mais, si $n-k=2p$ est pair, alors

$$\sin^{n-k}(\theta) = \sin^{2p}(\theta) = (1-\cos^2\theta)^p.$$

Ceci achève de prouver le fait que $\cos(n\theta) = T(\cos\theta)$, pour un polynôme T à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

(b) Si P est un autre polynôme vérifiant ♡, alors $P(x) = T(x)$ pour tout réel $x \in [-1,1]$, puisque chaque x de cet intervalle s'écrit $x = \cos\theta$. Alors P et T sont deux polynômes coïncidant sur une infinité de valeurs. Donc $P = T$.

2. (a) A l'aide des formules de trigonométrie ($\cos a + \cos b = \dots$), on a :

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2\cos\big((n+1)\arccos(x)\big)\cos(\arccos x) = 2xT_{n+1}(x).$$

(b) On a immédiatement $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. En appliquant la formule précédente, on trouve que

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \text{ puis } T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

(c) Prouvons par une récurrence double que T_n est de degré n et que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}. Le résultat est vrai au rang 1 et 2 d'après la question précédente. Si la propriété est vraie au rang n et au rang $n+1$, alors de

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) + T_n(x),$$

alors le degré de T_{n+2} est $1 + \deg(T_n) = n+1$, et le coefficient dominant est bien $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. La propriété est donc vraie aux rangs n et $n+1$.

3. (a) On a $T_n(\cos\theta_k) = \cos(k\pi + \pi/2)$ puisque, pour $x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$. On a donc $T_n(\cos\theta_k) = 0$, et comme T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant 2^{n-1} et donc on connait n racines distinces, les $\cos(\theta_k)$, on a la factorisation demandée.

(b) Clairement, $\|T_n\|_\infty \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\cos(x)| = 1$. D'autre part, $T_n(1) = \cos(n \times 0) = 1$, et donc $\|T_n\|_\infty = 1$. Enfin, on a

$$\arccos(c_k) = \frac{k\pi}{n} \implies T_n(c_k) = (-1)^k.$$

4. (a) La fonction $t \mapsto f(t)g(t)$ est continue sur $[-1,1]$, elle y est donc bornée. En particulier, il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(t)g(t)| \leq M$ pour tout $t \in [-1,1]$. On a donc

$$\left|\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{M}{(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}}.$$

Au voisinage de 1,

$$\frac{1}{(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}(1-t)^{1/2}}$$

tandis qu'au vosinage de 1,

$$\frac{1}{(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}(1+t)^{1/2}}.$$

Or, puisque $1/2 < 1$, la fonction $\frac{1}{(1-t)^{1/2}}$ est intégrable au voisinage de 1, tandis que $\frac{1}{(1+t)^{1/2}}$ est intégrable au voisinage de -1. Par comparaison à une fonction positive, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)^{1/2}}$ est intégrable sur $[-1,1]$. Par majoration, il en est de même de $t \mapsto \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

(b) Le seul point délicat à vérifier est que $\langle f, f\rangle = 0$ entraîne $f = 0$. On va utiliser le théorème suivant : si h est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b h(t)dt = 0$, alors $h = 0$ sur $[a,b]$. Ici, si $\int_{-1}^1 \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0$, alors

$$\int_a^b \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

pour tous réels $a < b$ contenus dans $]-1,1[$. Comme $t \mapsto \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $[a,b]$, on en déduit que $f = 0$ sur $[a,b]$. Comme $a < b$ sont arbitraires dans $]-1,1[$, on en déduit que $f = 0$ sur $]-1,1[$. La continuité de f en 1 et en -1 assure que $f = 0$ sur $[-1,1]$.

(c) On va effectuer le changement de variables $\theta = \arccos t$, puisque $\arccos t$ est un C^1-difféomorphisme de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$. Alors, $d\theta = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, de sorte que

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta) = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta.$$

Cette dernière intégrale se calcule en linéarisant l'expression, et on trouve que

$$\langle T_n, T_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0. \end{cases}$$

(a) D'après la formule de récurrence obtenue dans une question précédente, T_n coïncide avec une fonction polynômiale sur $[-1,1]$ et donc T_n est de classe C^∞ sur cet intervalle.

(b) On dérive simplement une fonction composée, et on trouve :

$$T_n'(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) D'après le développement limité à l'ordre 2 de la fonction cos en 0, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{2(\cos t - 1)}{t^2} = 1.$$

Puisque $\arccos x \to 0$ si $x \to 1$, par composition des limites on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{2(\cos\arccos x - 1)}{\arccos^2 x} = 1.$$

On prend la racine et on trouve

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2(x-1)}}{\arccos x} = 1$$

ce qui donne l'équivalent demandé de la fonction arccos. Maintenant, de $\cos(t) = 1 - t^2/2 + o(t^2)$, on tire

$$\cos(n\arccos x) = 1 + n^2(x-1) + o(x-1)$$

d(où

$$\frac{T_n(x)-T(1)}{x-1} \to n^2.$$

On a donc $T_n'(1)=n^2$.

2. Endomorphismes symétriques

Exercice 20.

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Que dire de u ?

Correction.

Soit λ une valeur propre de u, et x un vecteur propre associé. Alors on a d'une part

$$\langle u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

et d'autre part, par hypothèse,

$$\langle u(x), x\rangle = 0.$$

Toutes les valeurs propres de u sont donc nulles. Comme u est diagonalisable, on en déduit que $u=0$.

Exercice 21.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que vaut A ?

Correction.

Soit λ une valeur propre de A, et X un vecteur propre associé. Alors on a $A^pX = \lambda^pX$ mais aussi $A^pX = 0$. Ainsi, on doit avoir $\lambda^p = 0$, soit encore $\lambda = 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres de A doivent être nulles. Mais comme A est diagonalisable, il est clair que ceci entraîne que $A=0$. Réciproquement, la matrice nulle vérifie bien ceci !

Exercice 22.

Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que P^TAP soit diagonale.

Correction.

La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Le calcul du polynôme caractéristique nous dit que -3 est valeur propre simple, et que 3 est valeur propre double. Cherchons d'abord le sous-espace propre associé à 3. La résolution de l'équation $AX = 3X$ montre que l'espace propre associé est le plan vectoriel $x+y+z=0$. Une base de cet espace est donnée par le vecteurs $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$. L'orthonormalisation de cette base donne la base orthonormalisée $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$, $(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$. Pour l'espace propre associé à -3, il y a possibilité d'aller plus vite. Comme on a affaire à une matrice symétrique, les espaces propres sont orthogonaux. Ici, l'espace propre associé à -3 ne peut-être que l'orthogonal du plan $x+y+z=0$. Un vecteur normal à ce plan étant le vecteur $(1,1,1)$, une base orthonormée de l'espace propre associée à -3 est le vecteur $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. Finalement, on trouve qu'une matrice P qui convient est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 23.

Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Correction.

La matrice est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée. Le calcul de son polynôme caractéristique montre que ses valeurs propres sont 3, 6 et 9. Une base de vecteurs propres associés est $(2,2,-1),(-1,2,2),(2,-1,2)$. Ses vecteurs sont déjà orthogonaux (cela aurait le cas quelque soient les vecteurs propres choisis, car les espaces propres sont de dimension 1, et ils sont orthogonaux deux à deux). Pour obtenir une base orthonormale, il suffit de divisier chaque vecteur par sa norme. Une base orthonormale de vecteurs propres est donc :

$$(2/3,2/3,-1/3),(-1/3,2/3,2/3),(2/3,-1/3,2/3).$$

Exercice 24.

Soit $u : E \to E$ tel que, pour tous $x,y \in E$, on a $\langle u(x),y\rangle = \langle x,u(y)\rangle$. Démontrer que u est linéaire.

Correction.

Soient $x,y \in E$. Pour démontrer que $u(x+y)=u(x)+u(y)$, il suffit de démontrer que le vecteur $u(x+y)-u(x)-u(y)$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace. Prenons donc $z \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned}\langle u(x+y)-u(x)-u(y),z\rangle &= \langle u(x+y),z\rangle-\langle u(x),z\rangle-\langle u(y),z\rangle\\ &= \langle x+y,u(z)\rangle-\langle x,u(z)\rangle-\langle y,u(z)\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Avec une méthode tout à fait similaire, on prouve que $u(\lambda x)=\lambda u(x)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, et donc u est bien linéaire.

Exercice 25.

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice A^TA est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs.

Correction.

On remarque d'abord que la matrice A^TA est symétrique. Elle est donc diagonalisable à valeurs propres réelles. De plus, si X est un vecteur propre associé à la vecteur propre λ, alors on a

$$A^TAX=\lambda X \implies X^TA^TAX=\lambda X^TX \implies (AX)^TAX=\lambda X^TX \implies \|AX\|^2=\lambda\|X\|^2.$$

Ainsi, λ, quotient de deux réels positifs, est un réel positif.

Exercice 26.

Soient u,v deux endomorphismes symétrique d'un espace euclidien qui commutent, $u\circ v=v\circ u$.

1. Soit λ une valeur propre de u. On pose $F=\ker(u-\lambda Id_E)$. Démontrer que F et $F^\perp$ sont stables par v.
2. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de E diagonalisant simultanément u et v.

Correction.

1. Le fait que F est stable par v ne dépend pas du fait que u et v sont symétriques. En effet, dès que u et v commutent, si $P\in\mathbb{R}[X]$, alors $\ker P(u)$ est stable par v. Reprouvons ce fait dans ce cas particulier. Soit $x\in F$, de sorte que $u(x)=\lambda x$. Alors

$$u(v(x))=v(u(x))=v(\lambda x)=\lambda v(x)$$

de sorte que $v(x)\in F$ et que F est stable par v. Prenons ensuite $y\in F^\perp$, et prouvons que $v(y)\in F^\perp$. On veut prouver que, pour tout $x\in F$, on a

$$\langle v(y),x\rangle=0.$$

Mais puisque v est symétrique, ceci est égal à

$$\langle y,v(x)\rangle=0$$

puisque $v(x)\in F$. Ainsi, $F^\perp$ est aussi stable par F.

2. On va raisonner par récurrence sur la dimension de l'espace. Le résultat demandé est vrai en dimension 1. Supposons qu'il soit vrai pour toute dimension inférieure ou égale à $n-1$, et prouvons-le en dimension n. Puisque u est symétrique, u admet une valeur propre λ et notons F le sous-espace propre associé. F est stable par v. Notons v_0 la restriction de v à F. C'est un endomorphisme symétrique, et donc il existe une base orthonormale $(e_1,\dots,e_p)$ de F diagonalisant v_0. Puisque on travaille dans F, on a aussi $u(e_i)=\lambda e_i$. Remarquons ensuite que $F^\perp$ est stable par u et par v. Notons u_1 et v_1 les restrictions respectives de u et v à $F^\perp$. u_1 et v_1 commutent, et $\dim(F^\perp)<n$. Ainsi, il existe une base $(f_1,\dots,f_q)$ diagonalisant simultanément u_1 et v_1. La base $(e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_q)$ est alors une base de E diagonalisant simultanément u et v.

Exercice 27.

Soit H la matrice $H=\left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\dots,n}$, et soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1. Exprimer $\langle HX,X\rangle$ à l'aide d'une intégrale (on pourra remarquer que $\frac{1}{i+j-1}=\int_0^1 x^{i+j-2}dx$).
2. En déduire que la matrice H est définie positive.

Correction.

1. Rappelons la formule générale pour une matrice $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$:

$$\langle AX,X\rangle=\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}x_ix_j.$$

Ici, et utilisant l'indication, on a

$$\langle HX,X\rangle=\sum_{i,j=1}^n x_ix_j\int_0^1 x^{i+j-2}dx.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle HX,X\rangle &= \int_0^1\sum_{i,j=1}^n x_ix_jx^{i+j-2}dx\\ &= \int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_ix^{i-1}\right)^2dx.\end{aligned}$$

2. De la formule précédente, on déduit immédiatement que H est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet,si $\langle HX,X\rangle=0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0,1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall x\in[0,1],\sum_{i=1}^n x_ix^{i-1}=0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H est bien définie positive.

Exercice 28.

Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Correction.

Soit A une matrice symétrique quelconque. Il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^T$, où D est une matrice diagonale, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $M > \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$. On considère les deux matrices suivantes :

$$B = P\mathrm{diag}(M + \lambda_1, \dots, M + \lambda_n)P^T \text{ et } C = P\mathrm{diag}(M, \dots, M)P^T.$$

Alors B et C sont deux matrices symétriques définies positives, et $A = B - C$. L'espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives contient donc toutes les matrices symétriques. Comme l'ensemble des matrices symétriques est un espace vectoriel, on en déduit que c'est le sous-espace vectoriel recherché.

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit *positif* si pour tout x de E, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit *défini positif* si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient à $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.
2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On définit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \cdots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.
3. Soit w un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
   (a) Montrer que $wu = uw$.
   (b) En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
   (c) Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i. Vérifier que w_i est symétrique positif, puis diagonaliser w_i.
   (d) En déduire que $w = v$.
4. Soit $f \in GL(E)$.
   (a) Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle *décomposition polaire* de f.

Correction.

1. Puisque u est symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres, correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Prenant $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a
$$(u(x), x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$
Si toutes les valeurs propres sont positives, on en déduit que cette quantité est positive. D'autre part, s'il existe une valeur propre strictement négative, par exemple λ_1, alors $(u(e_1), e_1) = \lambda_1 < 0$, et u n'est pas positif. Pour que u soit défini positif, il est nécessaire et suffisant que toutes les valeurs propres de u soient strictement positives. Le raisonnement est identique.
2. D'après le théorème spectral, les E_i sont en somme directe orthogonale. Ainsi, si $x \in E_i$, on a $v_j(x) = 0$ si $j \neq i$ et $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$. Ainsi, $v(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x) = \sqrt{\lambda_i}x$, et $v^2(x) = \lambda_i x$. Puisque $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$, la relation est vraie sur E tout entier par recollement. D'autre part, v est symétrique positif, car chacun des v_i est symétrique positif.
3. (a) On a : $w \circ u = u^2 \circ u = u^3 = u \circ u^2 = u \circ w$.
   (b) Il est bien connu que si deux endomorphismes commutent, le noyau de tout polynôme en l'un est stable par l'autre. En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par w.
   (c) w_i est un endomorphisme symétrique positif, car c'est la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme positif. w_i est donc diagonalisable dans une base orthonormale. En outre, si μ est une de ses valeurs propres, associée au vecteur propre y, on a $w(y) = \mu y \implies w^2(y) = \mu^2 y = \lambda_i y$. Il vient $\mu = \sqrt{\lambda_i}$, puisque μ est positif. Ainsi, $w_i = \sqrt{\lambda_i} Id_{E_i}$.
   (d) On retrouve w comme $w = w_1 + \dots + w_n$. Ainsi, w coïncide avec v sur chaque E_i, et donc $w = v$ (par recollement).
4. (a) Si $x \neq 0$, on a :
$$(f^*(f(x)), x) = (f(x), f(x)) > 0,$$
car $f(x) \neq 0$ puis que f est inversible.
   (b) Prouvons d'abord l'unicité, en supposant que $f = g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$. On a nécessairement $f^* \circ f = h_1^2 = h_2^2$. Puisque h_1 et h_2 doivent être symétriques positifs, le résultat des questions précédentes prouve que $h_1 = h_2$. On en déduit, en inversant h_1 et h_2, que $g_1 = g_2$. Ce raisonnement nous guide alors pour l'existence. Posons h la racine carré positive de $f^* f$, qui est donnée par les questions précédentes. Il faut remarquer que h est *définie* positive, car h est inversible puisque h^2 l'est. On pose ensuite $g = fh^{-1}$, de sorte que $g^* g = h^{-1} f^* f h^{-1} = h^{-1} h^2 h^{-1} = Id_E$, ce qui prouve que g est un endomorphisme orthogonal.

Exercice 30.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit u un endomorphisme symétrique de E. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

1. Démontrer qu'il existe $x \in E$, x non-nul, tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Correction.

1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Alors on a
$$\mathrm{Tr}(u)=\sum_{i=1}^n \langle u(e_i),e_i\rangle.$$
Mais si on pose $x=e_1+\dots+e_n$, on a aussi $\langle u(e_i),e_i\rangle=\langle u(e_i),x\rangle$ puisque $u(e_i)$ est proportionnel à e_i. On en déduit donc que
$$\sum_{i=1}^n \langle u(e_i),x\rangle=0\implies \langle u(x),x\rangle=0.$$

2. On va raisonner par récurrence sur n, le résultat étant clairement vrai si $n=1$. Supposons maintenant le résultat vrai au rang $n-1$ et prouvons-le au rang n. Soit x le vecteur donné par la question précédente. On peut supposer que $\|x\|=1$. Posons $F=\mathrm{vect}(x)$ et $G=\mathrm{vect}(x)^\perp$. Considérons aussi $(y_1,\dots,y_{n-1})$ une base orthonormée de G. Dans la base orthonormée $(x,y_1,\dots,y_{n-1})$, la matrice de u s'écrit
$$\begin{pmatrix}0&*\\ *&B\end{pmatrix}$$
où B est symétrique. Soit v l'endomorphisme symétrique de G dont la matrice dans la base orthonormée $(y_1,\dots,y_{n_1})$ est B. Alors par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(x_1,\dots,x_{n-1})$ de G telle que la matrice de v dans cette base a tous ses coefficients nuls. Il en est de même de la matrice de u dans la base orthonormée $(x,y_1,\dots,y_n)$.

Exercice 31.

Soit E un espace euclidien de dimension $n\geq 2$. Un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si
$$\forall x,y\in E,\ \langle u(x),y\rangle=-\langle x,u(y)\rangle.$$
Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes antisymétriques.

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout $x\in E$, $\langle x,u(x)\rangle=0$.
2. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale est antisymétrique.
3. On fixe pour la suite de l'exercice un endomorphisme antisymétrique $u\in\mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)=(\ker u)^\perp$.
4. Soit F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $F^\perp$ est stable par u.
5. Montrer que $\ker(u)=\ker(u^2)$.
6. Démontrer que le spectre de u est soit vide, soit restreint à $\{0\}$.
7. Montrer que u^2 est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.
8. Soit F un espace euclidien, $v\in\mathcal{L}(F)$ antisymétrique tel que $v^2=-\alpha^2 Id_F$, où $\alpha>0$. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de F telle que la matrice de v dans cette

base soit de la forme

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} J(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\alpha) \end{pmatrix}$$

où

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

9. En déduire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a pour forme

$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\alpha_2) & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A(\alpha_r) & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction.

1. D'une part, il est clair que si u est antisymétrique, alors $\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle$ et donc $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, supposons que $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$ et considérons $x, y \in E$. Alors on a

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$$

et aussi

$$\begin{aligned} \langle u(x+y), x+y\rangle &= \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle \\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle$$

et donc que u est antisymétrique.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et soit A la matrice de u dans cette base. Alors on a $a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle$ pour tous i, j. Supposons désormais que u est antisymétrique. Alors pour tout couple (i, j), on a

$$a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle = -a_{j,i}$$

et la matrice A est bien antisymétrique. Réciproquement, supposons que A est antisymétrique, et prouvons que u est bien antisymétrique. On sait que l'on a $\langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle u(e_i), e_j\rangle$. Fixons maintenant $x, y \in E$ et écrivons les $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j u(e_j), \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n x_j y_i \langle u(e_j), e_i\rangle \\
&= -\sum_{i,j=1}^n x_j y_i \langle e_j, u(e_i)\rangle \\
&= -\left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{i=1}^n y_i u(e_i) \right\rangle \\
&= -\langle x, u(y)\rangle
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que u est antisymétrique.

3. Pour démontrer que $\mathrm{Im}(u) = (\ker u)^\perp$, il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}(u) \subset (\ker u)^\perp$, puis de remarquer que ces deux sous-espaces ont la même dimension, qui vaut $\dim(E) - \dim(\ker(u))$. Prenons donc $y \in \mathrm{Im}(u)$, que l'on écrit $y = u(x)$ et soit $z \in \ker(u)$. Alors on a
$$\langle y, z\rangle = \langle u(x), z\rangle = -\langle x, u(z)\rangle = 0$$
et donc on a bien $y \in (\ker u)^\perp$.
4. Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$. Alors on a
$$\langle u(y), x\rangle = -\langle y, u(x)\rangle = 0$$
puisque $y \in F^\perp$ et $u(x) \in u(F) \subset F$.
5. On a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(u^2)$. Alors
$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = -\langle x, u^2(x)\rangle = 0$$
et donc $x \in \ker(u)$.
6. Si le spectre de u n'est pas vide, soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre (non-nul) associé. Alors
$$\langle u(x), x\rangle = 0$$
alors que l'on a aussi
$$\langle u(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2$$
et donc $\lambda = 0$.
7. Il est facile de prouver que u^2 est diagonalisable, car en effet, u^2 est un endomorphisme symétrique : pour tous $x, y \in E$,
$$\langle u^2(x), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^2(y)\rangle.$$
Soit maintenant λ une valeur propre de u^2, de vecteur propre associé x. Comme ci-dessus, on a
$$\langle u^2(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2.$$
D'autre part,
$$\langle u^2(x), x\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = -\|u(x)\|^2,$$
ce qui prouve bien que $\lambda \le 0$.

8. On va procéder par récurrence sur la dimension de F. Remarquons déjà que la dimension de F ne peut pas être égale à 1. En effet, en dimension 1, un endomorphisme antisymétrique ne peut être que nul (regarder par exemple la matrice). Supposons donc que F soit de dimension 2. Soit e_1 un vecteur unitaire de F, et soit $e_2 = \frac{1}{\alpha}v(e_1)$. On a alors
$$v(e_2) = \frac{1}{\alpha}v^2(e_1) = -\alpha e_1.$$
Ainsi, la matrice de v dans la base (e_1, e_2) est bien $J(\alpha)$. Reste à voir que (e_1, e_2) est une base orthonormée. On a en effet
$$\langle e_1, e_2\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle e_1, v(e_1)\rangle = -\frac{1}{\alpha}\langle v(e_1), e_1\rangle = -\langle e_2, e_1\rangle$$
et donc $\langle e_1, e_2\rangle = 0$. D'autre part,
$$\|e_2\|^2 = \frac{1}{\alpha^2}\langle v(e_1), v(e_1)\rangle = \frac{-1}{\alpha^2}\langle e_1, v^2(e_1)\rangle = \|e_1\|^2 = 1.$$
Supposons désormais le résultat démontré pour toute dimension inférieure ou égale à $p-1$ et démontrons-le en dimension p. Soit (e_1, e_2) une famille orthonormale de F définie comme dans le cas de la dimension 2. Posons $G = \mathrm{vect}(e_1, e_2)^\perp$, qui est stable par v, et $v_{|G}$ est un endomorphisme antisymétrique de G. Par l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une base orthonormale $(e_3, \dots, e_p)$ de G telle que la matrice de $v_{|G}$ ait la bonne forme. La matrice de v dans la base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de v a alors la forme voulue.
9. Notons $-\alpha_1^2, \dots, -\alpha_r^2$ les valeurs propres non-nulles de u^2, et E_i les espaces propres associés. On sait que
$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r \oplus \ker(u^2)$$
et la somme est orthogonale. On réduit ensuite u dans chaque sous-espace propre de u^2 en utilisant la question précédente, et puisque $\ker(u) = \ker(u^2)$, u est l'endomorphisme nul sur $\ker(u^2)$. En recollant toutes ces bases orthonormales, on obtient la réduction voulue pour u.

3. Endomorphismes orthogonaux

Exercice 32.

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Correction.

On va prouver que ce sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1. Commençons par la première colonne de la matrice M orthogonale et triangulaire supérieure. Puisque sa norme vaut 1, et que seul le premier coefficient est non-nul, celui vaut ± 1. Considérons désormais la deuxième colonne, dont les coefficients éventuellement non-nuls sont $m_{1,2}$ et $m_{2,2}$. Puisque la première colonne est orthogonale à cette colonne, on a $\pm m_{1,2} = 0$ et donc $m_{1,2} = 0$. En considérant la norme, on trouve que $m_{2,2} = \pm 1$. Considérons maintenant la troisième colonne. Ses coefficients éventuellement non-nuls sont $m_{1,3}$, $m_{2,3}$ et $m_{3,3}$. Écrivons que la troisième colonne est orthogonale à la première. On trouve $m_{1,3} = 0$. Écrivons ensuite que la troisième colonne est orthogonale à la seconde. On trouve $m_{2,3}=0$. Le calcul de la norme donne $m_{3,3}=\pm 1$. On continue ainsi pour chaque colonne. Réciproquement, une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1 est bien une matrice orthogonale.

Exercice 33.

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on pose $S=a+b+c$ et $\sigma=ab+bc+ca$, et

$$M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $M\in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement $\sigma=0$ et $S=\pm 1$.
2. Démontrer que $M\in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma=0$ et $S=1$.

Correction.

1. On sait que $M\in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Or, le produit scalaire de deux colonnes différentes est toujours égal à σ, et la norme de chaque colonne vaut $(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$. On a donc
$$M\in O_3(\mathbb{R})\iff \sigma=0 \text{ et } (a^2+b^2+c^2)=1.$$
Or, si $\sigma=0$, on a
$$S^2=a^2+b^2+c^2+2\sigma=a^2+b^2+c^2.$$
On en déduit donc que
$$M\in O_3(\mathbb{R})\iff \sigma=0 \text{ et } S^2=1\iff \sigma=0\text{ et } S=\pm 1.$$
2. On a
$$M\in SO_3(\mathbb{R})\iff M\in O_3(\mathbb{R})\text{ et } \det(M)=1\iff \sigma=0\text{ et } S=\pm 1 \text{ et } \det(M)=1.$$
Calculons le déterminant de M. On a
$$\begin{aligned}\det(M) &= \begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c\\ a+b+c & a & b\\ a+b+c & c & a\end{vmatrix}\\ &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c\\ 1 & a & b\\ 1 & c & a\end{vmatrix}\\ &= S\begin{vmatrix} 1 & b & c\\ 0 & a-b & b-c\\ 0 & c-b & a-c\end{vmatrix}\\ &= S(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &= S(S^2-3\sigma)\\ &= S\end{aligned}$$

sous l'hypothèse $S = \pm 1$ et $\sigma = 0$. Ceci prouve le résultat.

Exercice 34.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. On considère l'endorphisme de E défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

Correction.

Il faut d'abord prouver que ϕ est une symétrie, c'est-à-dire que $\phi \circ \phi = Id$. Mais c'est clair, car $P(-(-X)) = P(X)$. Il faut aussi démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que ϕ conserve le produit scalaire, ou encore que

$$\langle \phi(P), \phi(Q)\rangle = \langle P, Q\rangle$$

pour tous polynômes $P, Q \in E$. Mais,

$$\langle \phi(P), \phi(Q)\rangle = \int_{-1}^{1} P(-t)Q(-t)dt = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \langle P, Q\rangle,$$

le seul argument utilisé étant le changement de variables $u = -t$.

Exercice 35.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $a \in E\backslash\{0\}$. On pose

$$s_a(x) = x - 2\frac{(a, x)}{(a, a)}a,$$

Montrer s_a est un endomorphisme orthogonal. Calculer $\ker(s_a - id)$, $\ker(s_a + id)$. Décrire alors géométriquement s_a.

Correction.

Posons $F = \mathrm{Vect}(a)$ et $G = a^{\perp}$. Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = g + \lambda a$, avec $g \in G$. On a alors :

$$s_a(x) = x - 2\frac{(a, \lambda a)}{(a, a)}a = \lambda a + g - 2\lambda a = g - \lambda a.$$

Ceci prouve en particulier, à l'aide de la relation de Pythagore, que $\|x\|^2 = \|s_a(x)\|^2 = \|g\|^2 + \lambda^2$, et que l'endomorphisme est orthogonal. Le calcul précédent prouve en outre que $\ker(s_a - id) = G$ et $\ker(s_a + id) = \mathrm{Vect}(a)$. Ainsi, on a

$$\ker(s_a - id) \oplus^{\perp} \ker(s_a + id) = E.$$

s_a est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $a^{\perp}$.

Exercice 36.

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, et soient u et v deux vecteurs unitaires de E. Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient u sur v.

Correction.

Il suffit de déterminer les rotations et les symétries qui envoient u sur v. Pour les rotations, c'est très simple : il ne peut que s'agir de la rotation d'angle (u, v). Pour les symétries, il y a deux cas à distinguer :

- Si $u = v$, alors il ne peut s'agir que de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{vect}(u, v)$.
- Si $u \neq v$, alors soit s une symétrie orthogonale par rapport à la droite D qui envoie u sur v. Notons e_1 un vecteur directeur unitaire de D, et e_2 un vecteur unitaire orthogonal à e_1. L'expression analytique de la symétrie s est

$$s(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 - x_2e_2.$$

Notons $u = u_1e_1 + u_2e_2$ et $v = v_1e_1 + v_2e_2$. Alors $s(u) = v$ entraîne $u_1 = v_1$ et $u_2 = -v_2$. Faisons la somme de u et v, on en déduit que e_1 est proportionnelle à $u + v$ et donc s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{vect}(u + v)$ (ce que l'on pouvait bien sûr prouver à l'aide d'un dessin et d'un raisonnement purement géométrique).

Exercice 37.

On considère la matrice $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

Correction.

La matrice M est clairement symétrique, et on vérifie qu'elle est orthogonale en vérifiant que les vecteurs colonnes sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Puisque M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, notons λ_1, λ_2 et λ_3 ses valeurs propres. Puisque M est une matrice orthogonale, c'est une isométrie et donc $\lambda_i \in \{-1, 1\}$. De plus, on sait que M est semblable à la matrice diagonale avec λ_1, λ_2 et λ_3 sur la diagonale. Comme la trace est un invariant de similitude, on doit avoir $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. La seule possibilité est que 1 est valeur propre double, et -1 est valeur propre simple. De plus, puisque M est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et vaut donc $(X - 1)(X + 1)$.

Exercice 38.

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On remarque que la matrice A est symétrique et orthogonale. L'endomorphisme canoniquement associé est donc une symétrie orthogonale. Pour le déterminer complètement, il suffit de déterminer l'ensemble de ses points invariants. On résout donc l'équation $AX = X$, et on trouve que l'ensemble des points invariants est $F = \mathrm{vect}(1,4,1)$. A est donc la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à F, ou encore du retournement par rapport à F.

Exercice 39.

Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On vérifie que les colonnes de A forment une base orthonormée. Ainsi, f est un endomorphisme orthogonal. De plus, $\det(A) = 1$. f est donc une rotation. Cherchons son axe en cherchant ses points fixes. L'équation $AX = X$ donne que l'axe est la droite $\mathrm{vect}(1,1,1)$. Posons $u = (1,1,1)$. Pour déterminer l'angle de cette rotation, que l'on note θ, on remarque qu'en écrivant la matrice de f sous forme réduite, on a $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$. Or, $\mathrm{Tr}(A) = 2$, et donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Pour conclure quant au signe de θ, on peut remarquer que, posant $v = (1,-1,0)$, qui est orthogonal à u, alors la base $(u, v, f(v))$ est directe, ce qui signifie que $\theta \in]0,\pi[$ modulo 2π. On en déduit donc que f est la rotation d'axe dirigé par $(1,1,1)$ et d'angle $\pi/3$.

Exercice 40.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique usuelle d'espace euclidien orienté. La base canonique est noté $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur $(1,1,1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est noté $\vec{v}$. Dans cet exercice, on souhaite calculer la matrice M dans la base canonique de la rotation r d'axe $\mathbb{R}\vec{v}$ et d'angle $2\pi/3$.

1. Méthode 1 : en étudiant la restriction de r au plan affine P d'équation $x + y + z = 1$, déterminer la matrice M.
2. Méthode 2 : En utilisant la matrice de r dans une base orthonormée directe donc le premier vecteur est le vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}$, déterminer M.

Correction.

1. Utilisons les notations affines suivantes : $O = (0,0,0)$, $A = O + \vec{i}$, $B = O + \vec{j}$, $C = O + \vec{k}$. Alors ABC est un triangle équilatéral du plan P. De plus, la droite affine $O + \mathbb{R}\vec{v}$ est orthogonale au plan P et elle coupe ce plan en $(1/3, 1/3, 1/3)$, centre de gravité du triangle équilatéral ABC. Donc la restriction de r au plan P transforme A en B, B en C et C en

A. Ceci permet de conclure que $r(\vec{i})=\vec{j}$, $r(\vec{j})=\vec{k}$ et $r(\vec{k})=\vec{i}$. Donc

$$M=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Cette méthode est facile mais un peu particulière puisqu'elle dépend fortement de la nature géométrique de r. La méthode de la question 2 est plus générale.

2. Soit $e_1=\frac{1}{\sqrt3}\vec{v}=(1/\sqrt3,1/\sqrt3,1/\sqrt3)$. Le vecteur $e_2=\frac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)$ est unitaire et orthogonal à e_1. Posons ensuite $e_3=e_1\wedge e_2$, de sorte que

$$e_3=\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2).$$

La famille $B=(e_1,e_2,e_3)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. La matrice de r dans cette base est

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(2\pi/3)&-\sin(2\pi/3)\\0&\sin(2\pi/3)&\cos(2\pi/3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&-\sqrt3/2\\0&\sqrt3/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canonique à la base (e_1,e_2,e_3) est

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$$

Par les formules de changement de base, on a

$$M=PM_1P^T.$$

Tout calcul fait, on retrouve bien sûr la même matrice qu'à la première question !

Exercice 41.

Déterminer les réels a,b,c,d,e tels que la matrice

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&c\\a&\frac{1}{\sqrt3}&d\\\frac{1}{\sqrt2}&b&e\end{pmatrix}$$

représente une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

A va représenter une rotation si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Pour que la première colonne soit de norme 1, il faut et il suffit de $a=0$. Pour que la deuxième colonne soit orthogonale à la première, il faut et il suffit que $b=-\frac{1}{\sqrt3}$. Remarquons que dans ce cas la deuxième colonne est bien de norme 1. Pour déterminer c,d,e, plusieurs méthodes sont envisageables :

— La plus simple est d'utiliser le produit vectoriel. Si (u,v) est une famille orthonormale, le seul vecteur w tel que (u,v,w) forme une base orthonormée directe est $w=u\wedge v$. On trouve alors facilement que $c=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $d=\frac{2}{\sqrt{6}}$ et $e=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

— On écrit toutes les relations connues : l'orthogonalité de la première et de la troisième colonne donne $c+e=0$, celle de la deuxième et de la troisième donne $c+d-e=0$. On obtient alors $c=-e$ et $d=2e$. Sachant que $c^2+d^2+e^2=1$, ceci permet de déterminer e au signe près. On calcule alors le déterminant de la matrice A, qui doit être égal à 1, pour trouver le signe de e.

Exercice 42.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soit $f\in O^-(E)$. Démontrer que f est la composée d'une rotation d'axe une droite D et de la réflexion par rapport à $D^\perp$.

Correction.

Il existe une base orthonormale (u,v,w) de E telle que la matrice de f dans cette base orthonormale soit de la forme

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Notons $D=\mathrm{vect}(u)$ de sorte que $D^\perp=\mathrm{vect}(v,w)$. Soit s la réflexion par rapport à $D^\perp$. Sa matrice dans la base (u,v,w) est

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de $s\circ f$ est

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

C'est bien la matrice d'une rotation r d'axe D. Puisque $s^{-1}=s$, on a bien

$$f=r\circ s=s\circ r$$

qui est donc la composée d'une rotation et d'une réflexion.

Exercice 43.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x,y\in E$,

$$\langle x,y\rangle=0\implies\langle u(x),u(y)\rangle=0.$$

1. Démontrer qu'il existe $k\in\mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x\in E$, $\|u(x)\|=k\|x\|$ (on pourra considérer une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E et les vecteurs e_1+e_i, e_1-e_i).
2. En déduire que u est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

Correction.

1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Remarquons d'abord que le résultat est immédiat si $n=1$, les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ étant les applications de la forme $u(x)=kx$. Supposons maintenant que $n\geq 2$ et pour $i\in\{2,\dots,n\}$, posons $x=e_1+e_i$ et $y=e_1-e_i$. Alors
$$\langle x,y\rangle=\langle e_1,e_1\rangle-\langle e_i,e_i\rangle=0.$$
On en déduit que $\langle u(x),u(y)\rangle=0$. Mais en développant, on trouve
$$\langle u(x),u(y)\rangle=\langle u(e_1),u(e_1)\rangle-\langle u(e_i),u(e_i)\rangle.$$
Ainsi, en notant $k^2=\langle u(e_1),u(e_1)\rangle$, on a $\langle u(e_i),u(e_i)\rangle=k^2$ pour tout $i=1,\dots,n$. De plus, on a pour $i\neq j$,
$$\langle u(e_i),u(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=0.$$
Ainsi, $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une base orthogonale de E. Maintenant, si $x\in E$, on le décompose en $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ de sorte que $u(x)=\sum_{i=1}^n x_iu(e_i)$. On calcule la norme de $\|u(x)\|$ en utilisant la base orthogonale $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ de sorte que
$$\|u(x)\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2\|u(e_i)\|^2=k^2\sum_{i=1}^n x_i^2=k^2\|x\|^2.$$
2. Si $k=0$, alors $u=0$ est u est la composée de l'homothétie de rapport 0 et de n'importe quel endomorphisme orthogonal. Si $k\neq 0$, notons h l'homothétie de rapport k, de sorte que h^{-1} est l'homothétie de rapport $1/k$. Alors, si $v=h^{-1}\circ u$, on a $\|v(x)\|=\frac{1}{k}\|u(x)\|=\|x\|$. Donc v est un endomorphisme orthogonal et $u=h\circ v$ est bien la composée d'un endomorphisme orthogonal et d'une rotation.

Exercice 44.

Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $u\in\mathcal{O}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Démontrer que $u(F^\perp)=\big[u(F)\big]^\perp$.
2. On dit que F est stable par u si $u(F)\subset F$. Démontrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

Correction.

1. Prenons $x\in E$. Puisque u est un automorphisme de E, on sait qu'il existe un unique $y\in E$ tel que $x=u(y)$. On a alors la chaine d'équivalence :
$$\begin{array}{rcl} x\in u(F^\perp) & \iff & y\in F^\perp\\ & \iff & \forall z\in F,\ \langle y,z\rangle=0\\ & \iff & \forall z\in F,\ \langle u(y),u(z)\rangle=0\\ & \iff & \forall z\in F,\ \langle x,u(z)\rangle=0\\ & \iff & x\in\big[u(F)\big]^\perp. \end{array}$$
2. Remarquons d'abord que si F est stable par u, on a en réalité $u(F)=F$. En effet, u étant un automorphisme de E, il préserve la dimension des sous-espaces. Supposons ensuite que

F est stable par u, et donc que $u(F) = F$. Alors d'après la question précédente, on a :

$$u(F^\perp) = \left[u(F)\right]^\perp = F^\perp$$

et donc $F^\perp$ est stable par u. La réciproque se démontre exactement de la même façon, en remarquant que $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 45.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.
2. En déduire que f est linéaire.

Correction.

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors on a, pour tout i, j dans $\{1, \dots, n\}$,
$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$$
ce qui prouve bien que $(f(e_i))$ est une base orthonormale de E.
2. On travaille toujours dans la base orthonormée précédente. Prenons $x \in E$ et écrivons-le
$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i.$$
Alors
$$\langle f(x), f(e_i)\rangle = \langle x, e_i\rangle.$$
De plus, puisque $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E, on sait que
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle f(e_i). \end{aligned}$$
Autrement dit, on a prouvé que si on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$. Ceci suffit à prouver que f est linéaire. En effet, prenons également $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a d'une part :
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \\ f(y) &= \sum_{i=1}^n y_i f(e_i) \\ f(x) + \lambda f(y) &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) f(e_i) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} x+\lambda y &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+\lambda y_i)e_i \\ f(x+\lambda y) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+\lambda y_i)f(e_i) \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que f est linéaire.

Exercice 46.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u\in O(E)$. On pose $v=u-Id$.

1. Démontrer que $\ker(v)=(\mathrm{Im} v)^\perp$. En déduire que $\ker(v)^\perp=\mathrm{Im}(v)$.
2. Soit
$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k.$$
Démontrer que pour tout $x\in E$, $(u_n(x))$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker v$.

Correction.

1. Soit $x\in\ker v$, c'est-à-dire que $u(x)=x$. Alors, pour tout $y\in\mathrm{Im}(v)$, $y=v(z)=u(z)-z$, on a
$$\langle x,y\rangle=\langle x,u(z)-z\rangle=\langle x,u(z)\rangle-\langle x,z\rangle=\langle u(x),u(z)\rangle-\langle x,z\rangle=0$$
car u est un endomorphisme orthogonal. On a donc $\ker(v)\subset(\mathrm{Im}(v))^\perp$. Comme, par le théorème du rang et le fait que $\dim(F^\perp)=\dim(E)-\dim(F)$, ces deux sous-espaces ont la même dimension, ils sont donc égaux. L'autre égalité se déduit immédiatement en prenant les orthogonaux.
2. Écrivons $x=a+b$ avec $a\in\ker(v)$ et $b\in\ker(v)^\perp$. Puisque $v(a)=0$, on a $u(a)=a$, et donc il est facile de vérifier que $u_n(a)=a$. D'autre part, calculons $u_n(b)$. Pour cela, on remarque que $b\in\mathrm{Im}(v)$ et donc que $b=v(c)=u(c)-c$. Mais alors,
$$\begin{aligned} u_n(b) &= u_n(v(c)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^{k+1}(c)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}u^k(c) \\ &= \frac{1}{n}u^{n+1}(c)-\frac{1}{n}c \end{aligned}$$
et ceci tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (on utilise à nouveau que l'endomorphisme est orthogonal, et donc que $\|u^{n+1}(c)\|=\|c\|$). On en déduit que $u_n(x)$ tend vers a, le projeté orthogonal de x sur $\ker v$.