Feuille d'exercices n°19

1. Révision dérivation intégration

2. Révision sup

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

Exercice 2.

Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$, pour $n \geq 3$.

Exercice 3.

Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$u(x) = x^2 \sin x \qquad f(x) = x^{n-1} \ln(1+x).$$

Exercice 4.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I =]-\infty, -2[$

3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$

4. $f(x) = \frac{1}{x \ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[$.

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\quad I = \int_0^1 x e^x dx \qquad \textbf{2.}\quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 6.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\textbf{1.}\quad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt \qquad \textbf{2.}\quad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Exercice 7.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ **2**.$f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1, +\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2, +\infty[$ **4**.$f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2, 1/3[$

Exercice 8.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\textbf{1.}\quad x \mapsto \frac{1}{x^3-1} \qquad \textbf{2.}\quad x \mapsto \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}$$

$$\textbf{3.}\quad x \mapsto \frac{1}{x^3-7x+6} \qquad \textbf{4.}\quad x \mapsto \frac{4x^2}{x^4-1}$$

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx \qquad \textbf{2.}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$$

$$\textbf{3.}\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx$$

Exercice 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3.

3. Fonctions vectorielles/Arcs paramétrés

Exercice 11.

Soit I un intervalle, E un espace vectoriel euclidien et $f : I \to E$ dérivable. On suppose de plus que f ne s'annule pas et on pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \|f(t)\|$. Démontrer que g est dérivable et donner g'.

Exercice 12. *Ellipse*

Étudier l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

Exercice 13.

On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe.

Exercice 14.

Étudier et tracer la courbe paramétrée $t \mapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$.

Exercice 15. *Astroïde*

On considère l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

1. Étudier cet arc paramétré.
2. On note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection des axes des abscisses (Ox) et des ordonnées (Oy) respectivement avec la tangente au point de paramètre t avec $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Calculer la distance (euclidienne) $d(A(t), B(t))$.

Exercice 16.

Soit $R > 0$.

1. Étudier et tracer la courbe paramétrée $t \mapsto (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$.

2. Une roue de rayon R roule sans glisser à vitesse constante R sur l'axe (Ox). Montrer que le point de la roue qui au temps $t = 0$ coïncide avec O décrit une cycloïde.

Exercice 17.

On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3} \right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe. On étudiera ses branches infinies, et on précisera la position de la courbe par rapport à sa ou ses asymptotes.

Exercice 18.

Étudier l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \mathrm{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \end{cases}$$

Exercice 19.

On considère l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$$

1. Étudier cet arc paramétré.
2. Donner une équation de la tangente et de la normale au point de paramètre t
3. Déterminer les droites qui sont à la fois tangente et normale à l'arc (mais pas pour le même paramètre, bien entendu !).