Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°

1. Révision Sup

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\quad I=\int_0^1 xe^x dx \qquad \textbf{2.}\quad J=\int_1^e x^2\ln x dx$$

Exercice 2.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\textbf{1.}\quad x\mapsto \arctan(x) \qquad \textbf{2.}\quad x\mapsto(\ln x)^2 \qquad \textbf{3.} x\mapsto\sin(\ln x).$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\quad I=\int_0^1 x(\arctan x)^2 dx \qquad \textbf{2.}\quad J=\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$$

Exercice 4.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\textbf{1.}\quad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt \qquad \textbf{2.}\quad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Exercice 5.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\textbf{1.}\quad \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx,\ n\in\mathbb{N} \qquad \textbf{2.}\quad F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt,\ x>0$$

Exercice 6.

Soit $f(x)=\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x\in]1,+\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 7.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1,+\infty[$ **2**. $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1,+\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2,+\infty[$ **4**. $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2, 1/3[$

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$ **2**. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx$

Exercice 9.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin^5 x$ **2**. $x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$ **3**. $x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x$.

2. Spé - Exercices basiques et d'entraînement

Exercice 10.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2**. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ **4**. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Exercice 11.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 12.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}dx$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$

Exercice 13.

Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt$ **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}dt$

Exercice 14.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 15.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Exercice 16.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge, puis, avec le changement de variables $u = 1/t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.
2. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$.

Exercice 17.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$.

Exercice 18.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. On suppose que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Démontrer que $\int_x^{x+1} f(t)dt \xrightarrow{x \to +\infty} 0$.

Exercice 19.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 20.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

1. Démontrer que, pour tout $A > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \geq A$ tel que $|xf(x)| \leq \varepsilon$.
2. En déduire l'existence d'une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\big(x_n f(x_n)\big)$ tend vers 0.

Exercice 21.

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$

Exercice 22.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$

3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right) dx,\ a \in \mathbb{R}.$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$

Exercice 23.

1. Montrer que les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont convergentes. On souhaite prouver que la fonction $\frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.
2. Méthode 1. Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \frac{1-\cos 2t}{2}$. En déduire le résultat.
3. Méthode 2. Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin t| dt.$$

Retrouver alors le résultat.

Exercice 24.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t} dt$ converge.

1. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t)e^{-s_0 t}$ sur $[0, +\infty[$. Démontrer que F est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $s > s_0$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ converge.
3. Sur le même modèle, démontrer que si $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ converge.

Exercice 25.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

Démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.