Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°19

1. Révision dérivation intégration

2. Révision sup

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

Correction.

Puisque f est de classe C^2, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x).$$

D'autre part, f' est de classe C^1 en 0. Elle admet donc un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x).$$

Faisant la différence des deux DL, on trouve

$$f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f''(0)}{2}x + o(x).$$

Divisant par x, il vient

$$\frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2} + o(1).$$

La limite recherchée est donc $f''(0)/2$.

Exercice 2.

Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$, pour $n \geq 3$.

Correction.

On va appliquer la formule de Leibniz en écrivant $f(x) = g(x)h(x)$ avec $h(x) = x^3 + 2x - 7$. La situation est assez facile ici car $h'(x) = 3x^2 + 2$, $h''(x) = 6x$, $h^{(3)}(x) = 6$ et $h^{(k)}(x) = 0$ dès que $k \geq 4$. D'autre part, les dérivées successives de la fonction exponentielle sont encore égales à la fonction exponentielle. On en déduit que

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} h^{(n-k)}(x) e^x \\ &= \left((x^3 + 2x + 7) + n(3x^2 + 2) + \frac{n(n-1)}{2} 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 6 \right) e^x \\ &= \big(x^3 + 3nx^2 + (3n^2 - 3n + 2) + (n^3 - 3n^2 + 4n - 7)\big) e^x. \end{aligned}$$

Exercice 3.

Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$u(x) = x^2 \sin x \qquad f(x) = x^{n-1} \ln(1+x).$$

Correction.

On écrit $u(x) = v(x)w(x)$ avec $v(x) = x^2$ et $w(x) = \sin x$. On va appliquer la formule de Leibniz. L'application est simplifiée par le fait que

$$v'(x) = 2x,\ \ v''(x) = 2,\ \ v^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k \geq 2.$$

Reste à calculer les dérivées successives de $\sin x$. Pour cela, on peut "un peu" tricher et remarquer que

$$(\sin x)' = \sin(x + \pi/2).$$

On obtient immédiatement $(\sin)^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$, d'où

$$u^{(n)}(x) = x^2 \sin(x + n\pi/2) + 2nx \sin(x + (n-1)\pi/2) + n(n-1)\sin(x + (n-2)\pi).$$

Pour l'autre fonction, on écrit $f(x) = g(x)h(x)$ avec $g(x) = x^{n-1}$ et $h(x) = \ln(1+x)$, qui sont C^∞ sur $]-1, +\infty[$. On peut utiliser la formule de Leibniz. Calculons au préalable la dérivée k-ième de g et h :

$$g^{(k)}(x) = (n-1)\dots(n-k)x^{n-1-k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k},$$

pour $k \leq n-1$, avec $g^{(n)}(x) = 0$. D'autre part, on établit facilement par récurrence que

$$h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

pour $k > 0$. Utilisant la formule de Leibniz, et $g^{(n)} = 0$, on trouve

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^k}.$$

Si $x=0$, on trouve que $f^{(n)}(0)=n!$. Si $x\neq 0$, on factorise par x pour faire apparaitre une somme qu'on va simplifier à l'aide de la formule du binome :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^k\right)\\ &= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\left(1+\frac{-x}{1+x}\right)^n\right)\\ &= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)^n}\right). \end{aligned}$$

Exercice 4.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x)=(3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I=\mathbb{R}$ **2.** $f(x)=\frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I=]-\infty,-2[$
3. $f(x)=\frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I=]-\infty,0[$ **4.** $f(x)=\frac{1}{x\ln(x^2)},\ I=]1,+\infty[$.

Correction.

1. Posons $u(x)=3x^2-2x+3$, de sorte que $u'(x)=6x-2=2(3x-1)$. On a donc
$$f(x)=\frac{1}{2}\times u'(x)u(x)^3.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4.$$
2. Posons $u(x)=x^3-3x+1$ de sorte que $u'(x)=3x^2-3=-3(1-x^2)$. On en déduit que
$$f(x)=\frac{-1}{3}\times\frac{u'(x)}{u(x)^3}.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{(x^3-3x+1)^2}.$$
3. Posons $u(x)=x(x-2)=x^2-2x$. On a $u'(x)=2x-2=2(x-1)$. On en déduit que
$$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x)=\sqrt{x^2-2x}.$$

4. Il faut commencer par écrire que $\ln(x^2) = 2\ln x$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)},$$

avec $u(x) = \ln x$. On en déduit qu'une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x).$$

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ **2.** $J = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln x dx$

Correction.

1. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & e^x & v(x) & = & e^x \end{array}$$

On obtient donc

$$\int_0^1 xe^x dx = 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x dx.$$

Comme on sait calculer cette dernière intégrale, on trouve finalement

$$\int_0^1 xe^x dx = e - e + 1 = 1.$$

2. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \ln x & u'(x) & = & \frac{1}{x} \\ v'(x) & = & x^2 & v(x) & = & \frac{x^3}{3} \end{array}$$

On obtient donc

$$\begin{array}{rcl} J & = & \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \\ & = & \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) \\ & = & \frac{2e^3+1}{9}. \end{array}$$

Exercice 6.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\textbf{1.}\quad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt \qquad \textbf{2.}\quad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t=1$, $u=1$ et lorsque $t=4$, u vaut 2. De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-u}{u}$$

et

$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \implies dt = 2udu.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t}dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u}2udu \\ &= \int_1^2 (2-2u)du \\ &= \left[2u-u^2\right]_1^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[e,e^2]$. Effectuons le changement de variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = \left[\ln|1+u|\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

Exercice 7.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1,+\infty[$ **2.** $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1,+\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2,+\infty[$ **4.** $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2,1/3[$

Correction.

1. Le numérateur et le dénominateur ayant même degré, on va chercher à écrire la fraction rationnelle sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve

$$f(x) = \frac{ax^2 + x(-2a+b) + (a-b+c)}{(x-1)^2}.$$

Par identification, on trouve $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$. Ainsi, les primitives de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + d,$$

où d est une constante.

2. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

Par identification (par exemple...), on trouve que $a = 2$ et $b = -3$. Une primitive sur $]-1, +\infty[$ de la fonction est donc

$$x \mapsto 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1}.$$

3. C'est facile, car la fraction rationnelle est sous la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$, avec $u(x) = (x^2 - 4)$. Une primitive est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{-1}{2(x^2-4)}.$$

4. On essaie cette fois d'écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ 8a + 4b + 6c & = & 18 \\ -a + 4b + c + 3d & = & 10 \\ -a + b - c - d & = & -9. \end{array}\right.$$

On résoud ce système et on trouve comme solution $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = 5$. On intègre maintenant chacun des éléments simples et on trouve qu'une primitive de la fonction f est

$$x \mapsto 2x - \frac{1}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{5}{2(2x+1)}.$$

Exercice 8.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$

3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-7x+6}$ **4.** $x \mapsto \dfrac{4x^2}{x^4-1}$

Correction.

1. Le dénominateur se factorise en $(x-1)(x^2+x+1)$. On cherche alors à écrire
$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$
Par identification (par exemple...) on trouve $a = 1/3$, $b = -1/3$ et $c = -2/3$, soit
$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \times \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$
On cherche alors à faire apparaître la dérivée de x^2+x+1 pour faciliter l'intégration, et on trouve
$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1}.$$
Pour intégrer le dernier terme, on écrit
$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
ce qui donne finalement qu'une primitive de la fonction est
$$x \mapsto \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. On commence par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. On trouve que
$$x^3+2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x+1$$
d'où
$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$
Une primitive est donc la fonction
$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1|.$$

3. On a la factorisation suivante :
$$x^3-7x+6 = (x+3)(x-1)(x-2).$$
On sait qu'on peut écrire
$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

et on trouve
$$\frac{1}{x^3-7x+6}=\frac{1}{20(x+3)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{5(x-2)}.$$
Une primitive est donc
$$x\mapsto \frac{1}{20}\ln|x+3|-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{5}\ln|x-2|.$$

4. Le dénominateur se factorise en
$$x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1).$$
La décomposition attendue a la forme
$$\frac{4x^2}{x^4-1}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}.$$
On trouve facilement (multipliant par $x-1$ et faisant $x=1$, puis multipliant par $x+1$ et faisant $x=-1$) que $c=1$ et $d=-1$. On en déduit qu'on doit avoir $a=0$ et finalement $b=2$. On en déduit donc
$$\frac{4x^2}{x^4-1}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$
Une primitive de la fonction recherchée est donc
$$x\mapsto 2\arctan x+\ln|x-1|-\ln|x+1|.$$

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2e^x\cos x dx$

Correction.

1. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F: x\mapsto e^x(ax^3+bx^2+cx+d)$. On a alors
$$F'(x)=e^x\big(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)\big).$$
Par identification, on trouve que F est une primitive de $x\mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$ lorsque $a=2$, $3a+b=-3$, $2b+c=5$ et $c+d=1$, soit $a=2$, $b=-3$, $c=5$ et $d=-4$. Les primitives sont donc les fonctions
$$x\mapsto e^x(2x^3-3x^2+5x-4)+C.$$
L'intégrale recherchée vaut donc
$$F(1)-F(0)=4.$$

2. On commence par linéariser $\sin^2 x$ et on trouve que l'intégrale vaut

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x} \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(2x) dx.$$

On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos(2x) dx &= \Re e \left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x} dx \right) \\ &= \Re e \left(\left[\frac{1}{2i-1} e^{(2i-1)x} \right]_0^{2\pi} \right) \\ &= \Re e \left(\frac{1}{5}(2i+1)(1 - e^{-2\pi}) \right) \\ &= \frac{1}{5}(1 - e^{-2\pi}). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$I = \frac{2}{5}(1 - e^{-2\pi}).$$

3. Notons I l'intégrale. I est égale à $\Re e(J)$ avec $J = \int_0^\pi x^2 e^{(1+i)x}$ (on a posé $\cos x = \Re e(e^{ix})$). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^2 e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_0^\pi - \frac{2}{1+i} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx \\ &= -\frac{\pi^2 e^\pi}{1+i} - \frac{2}{1+i} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx. \end{aligned}$$

On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x e^{(1+i)x} dx &= \left[\frac{x e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_0^\pi - \frac{1}{1+i} \int_0^\pi e^{(1+i)x} dx \\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2} \left[e^{(1+i)x} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} + \frac{i}{2}(1 - e^\pi). \end{aligned}$$

Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve :

$$J = -\pi^2 e^\pi \frac{1-i}{2} - i\pi e^\pi - \frac{1+i}{2}(1 - e^\pi),$$

soit

$$I = -\frac{1}{2} + \frac{1 - \pi^2}{2} e^\pi.$$

Exercice 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3.

Correction.

Une intégration par parties donne, en posant $u(x) = (x^2+1)^{-n}$ et $v'(x) = 1$,
$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx.$$
Or,
$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1}.$$
Regroupant les termes, on trouve
$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} \iff I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$
Sachant que $I_1 = \frac{\pi}{4}$, on trouve
$$I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \text{ et } I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

3. Fonctions vectorielles/Arcs paramétrés

Exercice 11.

Soit I un intervalle, E un espace vectoriel euclidien et $f : I \to E$ dérivable. On suppose de plus que f ne s'annule pas et on pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \|f(t)\|$. Démontrer que g est dérivable et donner g'.

Correction.

Pour tout $t \in I$, on a $g(t) = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}$. La fonction racine carrée étant dérivable sur $]0,+\infty[$ (de dérivée $x \mapsto 1/2\sqrt{x}$) et la fonction $t \mapsto \langle f(t), f(t)\rangle$ étant dérivable sur I, de dérivée $2\langle f(t), f'(t)\rangle$, on en déduit par composition la dérivabilité de g sur I. De plus, pour tout $t \in I$, on a
$$g'(t) = \frac{2\langle f(t), f'(t)\rangle}{2\sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}} = \frac{\langle f(t), f'(t)\rangle}{\|f(t)\|}.$$

Exercice 12. *Ellipse*

Étudier l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

Exercice 13.

On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe.

Correction.

1. Notons $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$ et $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$. On commence par remarquer que x et y sont deux fonctions impaires. Il suffit donc de construire la courbe pour $t \in [0, +\infty[$, et on déduira le reste du tracé par symétrie par rapport à l'origine. De plus, un calcul facile prouve que, pour $t \neq 0$, on a
$$x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t) \text{ et } y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t).$$
Les points $M(t)$ et $M(1/t)$ sont donc images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la première bissectrice du repère. Pour réduire l'intervalle d'étude, il reste à trouver une partie J de $\mathbb{R}$ tel que $J \cup g(J) = \mathbb{R}_+$ où $g(t) = 1/t$. Et $J = [0, 1]$ convient. On va donc étudier la courbe simplement sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Le calcul des dérivées donne :
$$x'(t) = \frac{(1-3t^4)}{(1+t^4)^2} \text{ et } y'(t) = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$
On obtient le tableau de variations suivant :

t	-0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	1
$y'(t)$	0	$+$		$+$	

Exercice 14.

Étudier et tracer la courbe paramétrée $t \mapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$.

Correction.

On remarque d'abord que les deux fonctions x et y sont 2π-périodiques (on a noté $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$ et $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$. De plus, $x(-t) = x(t)$ alors que $y(-t) = -y(t)$. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$, puis effectuer une symétrie par rapport à l'axe (Ox). Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont

$$x'(t) = -2(\sin(t) - \sin(2t)) = 4\sin(t/2)\cos(3t/2)$$

$$y'(t) = 2(\cos(t) - \cos(2t)) = 4\sin(3t/2)\sin(t/2).$$

On remarque alors que x' est positive sur $[0, \pi/3]$, et négative sur $[\pi/3, \pi]$. De même, y' est positive sur $[0, 2\pi/3]$, et négative sur $[2\pi/3, \pi]$. On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	1	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$-1/2$	$\searrow$	-3
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Exercice 15. *Astroïde*

On considère l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

1. Étudier cet arc paramétré.
2. On note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection des axes des abscisses (Ox) et des ordonnées (Oy) respectivement avec la tangente au point de paramètre t avec $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Calculer la distance (euclidienne) $d(A(t), B(t))$.

Exercice 16.

Soit $R > 0$.

1. Étudier et tracer la courbe paramétrée $t \mapsto (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$.
2. Une roue de rayon R roule sans glisser à vitesse constante R sur l'axe (Ox). Montrer que le point de la roue qui au temps $t = 0$ coïncide avec O décrit une cycloïde.

Correction.

1. Notons $x(t) = R(t - \sin(t))$ et $y(t) = 1 - \cos(t)$. On remarque que $x(t + 2\pi) = x(t) + R2\pi$ et que $y(t + 2\pi) = y(t)$. Il suffit donc d'étudier et de tracer la courbe pour t appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Le reste du tracé s'en déduit alors par des translations de vecteurs $(R2k\pi, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On peut encore restreindre le domaine d'étude en remarquant que $x(-t) = -x(t)$ et que $y(-t) = y(t)$. On peut donc restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi]$, puis effectuer une symétrie par rapport à (Oy) pour en déduire le tracé sur $[0, \pi]$. Les

fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, le calcul des dérivées donne

$$x'(t) = R(1 - \cos t) \text{ et } y'(t) = R \sin t.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	$2R$
$x(t)$	0	$\nearrow$	$R\pi$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2R$
$y'(t)$	0	$+$	0

Exercice 17.

On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3} \right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe. On étudiera ses branches infinies, et on précisera la position de la courbe par rapport à sa ou ses asymptotes.

Correction.

1. Notons $x(t) = \frac{t}{1+t^3}$ et $y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$. Un calcul facile prouve que, pour $t \neq 0$, on a

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t) \text{ et } y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t).$$

   Les points $M(t)$ et $M(1/t)$ sont donc images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la première bissectrice du repère. Pour réduire l'intervalle d'étude, il reste à trouver une partie J de $\mathbb{R}$ tel que $J \cup g(J) = \mathbb{R}$ où $g(t) = 1/t$. Et $J =]-1, 1] \backslash \{0\}$ convient. On va donc étudier la courbe simplement sur l'intervalle $]-1, 1]$.
2. Le calcul des dérivées donne :

$$x'(t) = \frac{(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \text{ et } y'(t) = \frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}.$$

   On obtient le tableau de variations suivant :

t	-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		1
$x'(t)$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2^{2/3}}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2^{1/3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	

Exercice 18.

Étudier l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases}$$

Exercice 19.

On considère l'arc paramétré plan $(\mathbb{R}, \gamma)$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$$

1. Étudier cet arc paramétré.
2. Donner une équation de la tangente et de la normale au point de paramètre t
3. Déterminer les droites qui sont à la fois tangente et normale à l'arc (mais pas pour le même paramètre, bien entendu !).