Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°

1. Révision Sup

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\quad I = \int_0^1 xe^x dx \qquad \textbf{2.}\quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Correction.

1. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & e^x & v(x) & = & e^x \end{array}$$

On obtient donc

$$\int_0^1 xe^x dx = 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x dx.$$

Comme on sait calculer cette dernière intégrale, on trouve finalement

$$\int_0^1 xe^x dx = e - e + 1 = 1.$$

2. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \ln x & u'(x) & = & \frac{1}{x} \\ v'(x) & = & x^2 & v(x) & = & \frac{x^3}{3} \end{array}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) \\ &= \frac{2e^3+1}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\textbf{1.}\quad x \mapsto \arctan(x) \qquad \textbf{2.}\quad x \mapsto (\ln x)^2 \qquad \textbf{3.} x \mapsto \sin(\ln x).$$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \arctan x & u'(x) & = & \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) & = & 1 & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \int \frac{t}{t^2+1} dt.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g, et donc

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

2. La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ étant continue sur $]0, +\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On se restreint à cet intervalle et on intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & (\ln x)^2 & u'(x) & = & 2\frac{\ln x}{x} \\ v'(x) & = & 1 & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln t dt.$$

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ étant $x \mapsto x \ln x - x$ (résultat qui se retrouve en intégrant par parties), on trouve finalement qu'une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est

$$x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x.$$

3. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0, +\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \sin(\ln x) & u'(x) & = & \frac{1}{x} \cos(\ln x) \\ v'(x) & = & 1 & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x).$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{array}{rclrcl} u_1(x) & = & \cos(\ln x) & u_1'(x) & = & -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \\ v_1'(x) & = & 1 & v_1(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x).$$

En mettant tout cela ensemble, on trouve

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

soit

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} \big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x) \big).$$

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$ **2.** $J = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

Correction.

1. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors
$$I = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)(\arctan x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx.$$
On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :
$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi^2}{16} - \left[x\arctan x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0,1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0,1]$ en posant $f(0) = 0$, ce qui donne un sens à J. Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a > 0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $J(a) = \int_a^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :
$$\begin{array}{rr} u(x) = (\ln x) & v'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{array}$$
ce qui donne
$$J(a) = \left[-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}\right]_a^1 + \frac{1}{2}\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$
De plus,
$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$
de sorte que
$$\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^1 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \ln(a) + \frac{1}{2}\ln(1+a^2).$$
On obtient donc que
$$J(a) = \frac{\ln a}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln a}{2} + \frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Reste à faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve

$$J(a) = \frac{-a^2\ln(a)}{2(a^2+1)} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Comme $a^2\ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1+a^2)$, on conclut finalement que

$$J = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Exercice 4.

En effectuant un changement de variables, calculer

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $u = 1$ et lorsque $t = 4$, u vaut 2. De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-u}{u}$$

et

$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \implies dt = 2udu.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t}dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u}2udu\\ &= \int_1^2 (2-2u)du\\ &= \left[2u-u^2\right]_1^2\\ &= -1\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[e,e^2]$. Effectuons le changement de variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = \left[\ln|1+u|\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

Exercice 5.

En effectuant un changement de variables, calculer

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx,\ n\in\mathbb{N}$ **2.** $\displaystyle F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt,\ x>0$

Correction.

1. La fonction $x\mapsto \ln x$ réalise une bijection de $[1,e]$ sur $[0,1]$. On pose donc $u=\ln x$ de sorte que $du=\frac{dx}{x}$. De plus, lorsque x vaut 1, u vaut 0 et lorsque x vaut e, u vaut 1. On trouve donc
$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx &= \int_0^1 u^n du\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$
2. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On se limite donc à calculer l'intégrale recherchée pour $x>0$. La fonction $t\mapsto\sqrt{e^t-1}$ est une bijection de $[1,x]$ sur $[\sqrt{e-1},\sqrt{e^x-1}]$. Posant $u=\sqrt{e^t-1}$, on a
$$du=\frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}}dt$$
d'où
$$F(x)=2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{du}{u^2+4}=\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right)-\arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).$$

Exercice 6.

Soit $f(x)=\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x\in]1,+\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que
$$\forall x\in]1,+\infty[,\ f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2}.$$
2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Correction.

1. On peut tout mettre au même dénominateur, et procéder par identification. En effet, on a
$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2+b(x-1)(x+3)+c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}\\ &= \frac{x^2(a+b)+x(6a+2b+c)+(9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.\end{aligned}$$

L'égalité demandée sera vérifiée dès que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 5 \\ 6a+2b+c & = & 21 \\ 9a-3b-c & = & 22 \end{array}\right.$$

On résoud ce système en commençant par remarquer que $a = 5 - b$. Il est donc successivement équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 5-b \\ -4b+c & = & -9 \\ -12b-c & = & -23 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 5-b \\ c & = & -9+4b \\ -16b & = & -32 \end{array}\right.$$

On trouve finalement comme unique solution $a = 3$, $b = 2$ et $c = -1$, de sorte que

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

2. On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions
$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} + d.$$
La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle d vérifie l'équation
$$3\ln(1) + 2\ln 5 + \frac{1}{5} + d = 0.$$
La primitive de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2 est donc la fonction F définie par
$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2\ln 5 - \frac{1}{5}.$$

Exercice 7.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ **2.** $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1, +\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2, +\infty[$ **4.** $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2, 1/3[$

Correction.

1. Le numérateur et le dénominateur ayant même degré, on va chercher à écrire la fraction rationnelle sous la forme
$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve

$$f(x) = \frac{ax^2 + x(-2a+b) + (a-b+c)}{(x-1)^2}.$$

Par identification, on trouve $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$. Ainsi, les primitives de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ sont les fonctions

$$F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + d,$$

où d est une constante.

2. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

Par identification (par exemple...), on trouve que $a = 2$ et $b = -3$. Une primitive sur $]-1, +\infty[$ de la fonction est donc

$$x \mapsto 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1}.$$

3. C'est facile, car la fraction rationnelle est sous la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$, avec $u(x) = (x^2 - 4)$. Une primitive est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{-1}{2(x^2-4)}.$$

4. On essaie cette fois d'écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ 8a + 4b + 6c & = & 18 \\ -a + 4b + c + 3d & = & 10 \\ -a + b - c - d & = & -9. \end{array}\right.$$

On résoud ce système et on trouve comme solution $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = 5$. On intègre maintenant chacun des éléments simples et on trouve qu'une primitive de la fonction f est

$$x \mapsto 2x - \frac{1}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{5}{2(2x+1)}.$$

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx$

Correction.

1. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F : x \mapsto e^x(ax^3+bx^2+cx+d)$. On a alors
$$F'(x) = e^x\big(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)\big).$$
Par identification, on trouve que F est une primitive de $x\mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$ lorsque $a=2$, $3a+b=-3$, $2b+c=5$ et $c+d=1$, soit $a=2$, $b=-3$, $c=5$ et $d=-4$. Les primitives sont donc les fonctions
$$x\mapsto e^x(2x^3-3x^2+5x-4)+C.$$
L'intégrale recherchée vaut donc
$$F(1)-F(0)=4.$$
2. On commence par linéariser $\sin^2 x$ et on trouve que l'intégrale vaut
$$I=\int_0^{2\pi} e^{-x}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{1-e^{-2\pi}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos(2x)dx.$$
On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)dx &= \Re e\left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x}dx\right)\\ &= \Re e\left(\left[\frac{1}{2i-1}e^{(2i-1)x}\right]_0^{2\pi}\right)\\ &= \Re e\left(\frac{1}{5}(2i+1)(1-e^{-2\pi})\right)\\ &= \frac{1}{5}(1-e^{-2\pi}).\end{aligned}$$
Finalement, on trouve
$$I=\frac{2}{5}(1-e^{-2\pi}).$$
3. Notons I l'intégrale. I est égale à $\Re e(J)$ avec $J=\int_0^\pi x^2e^{(1+i)x}$ (on a posé $\cos x = \Re e(e^{ix})$). En intégrant par parties, on trouve
$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx\\ &= -\frac{\pi^2e^\pi}{1+i}-\frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx.\end{aligned}$$

On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx &= \left[\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{1}{1+i}\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx\\
&= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^\pi\\
&= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} + \frac{i}{2}(1-e^\pi).
\end{aligned}$$

Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve :

$$J = -\pi^2 e^\pi \frac{1-i}{2} - i\pi e^\pi - \frac{1+i}{2}(1-e^\pi),$$

soit

$$I = -\frac{1}{2} + \frac{1-\pi^2}{2}e^\pi.$$

Exercice 9.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin^5 x$ **2.** $x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$ **3.** $x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x$.

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\
&= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}\right)\\
&= \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5\sin(3x)}{16} + \frac{5\sin(x)}{8}.
\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-\cos(5x)}{80} + \frac{5\cos(3x)}{48} - \frac{5\cos(x)}{8}.$$

2. On écrit, pour éviter le calcul d'un produit, $\cos^4 x \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^6 x$. Or,

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x} + e^{-i4x} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6\right)\\
&= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right).
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6}\left(2\cos(6x) + 12\cos(4x) + 30\cos(2x) + 20\right).$$

On a donc

$$\cos^4 x - \cos^6 x = -\frac{1}{32}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{32}\cos(2x) + \frac{1}{16}.$$

Une primitive de la fonction étudiée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{x}{16}.$$

3. On commence par linéariser $\cos^3 x$ en $\big(\cos(3x) + 3\cos(x)\big)/4$. Avec la formule

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}\big(\cos(p+q) + \cos(p-q)\big)$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)\cos^3 x &= \frac{1}{8}\int \big(1 + \cos(6x) + 3\cos(4x) + 3\cos(2x)\big)dx \\ &= \frac{x}{8} + \frac{\sin(6x)}{48} + \frac{3\sin(4x)}{32} + \frac{3\sin(2x)}{16} + C.\end{aligned}$$

2. Spé - Exercices basiques et d'entraînement

Exercice 10.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,1]$, le problème de convergence est en 0. Pour le traiter, on peut : <ul class="rien">
2. remarquer qu'on connait une primitive de ln, à savoir $x \mapsto x\ln x - x$. On a donc

$$\int_X^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_X^1 = -X\ln X + X - 1$$

qui tend vers -1 si X tend vers 0.

3. comparer : On sait que $\sqrt{x}\ln x \to 0$ quand $x \to 0$. Ceci signifie que $\ln x = o(1/\sqrt{x})$ en 0. Puisque $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge, on en déduit par critère de comparaison que $\int_0^1 \ln x dx$ converge.
4. Ici, on ne connait pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions

usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$. Mais il est facile de voir que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u \to +\infty} u e^{-u} = 0.$$

Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

5. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour $x \geq 0$, $|xe^{-x} \sin x| \leq xe^{-x}$. D'autre part, puisque $x^3 e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on en déduit que $xe^{-x} \sin(x) = o(1/x^2)$. Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.
6. La fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, elle est équivalente à $\ln t$, fonction négative au voisinage de 0 et intégrable. Par comparaison, $\int_0^1 \ln t e^{-t} dt$ converge. Au voisinage de l'infini, on remarque que $t^2 \ln t e^{-t}$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Ainsi, $\ln t e^{-t} =_{+\infty} o(1/t^2)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$ converge. Ainsi, on a prouvé la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$.
7. En 1, la fonction est équivalente à $\frac{1}{1-t}$, fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1). Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ diverge.

Exercice 11.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, 1]$. En 0, $\frac{1}{e^t-1}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, $\int_0^1 \frac{dt}{e^t-1}$ est divergente.
2. La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t \to +\infty} te^{-\sqrt{t}} = 0$$

par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ est convergente.

3. La fonction $t \mapsto \cos^2(1/t)$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, on a

$$|\cos^2(1/t)| \leq 1.$$

Puisque $\int_0^1 1dt$ converge (ce n'est même pas une vraie intégrale généralisée), on en déduit que $\int_0^1 \cos^2(1/t)dt$ est aussi convergente.

Exercice 12.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}dx$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En 0, elle est équivalente à $\ln t$ qui est intégrable au voisinage de 0. En $+\infty$, on écrit simplement que
$$\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0.$$
Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. En résumé, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ converge.
2. La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. En 1, on sait que
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \implies \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x-1}} = 1$$
et donc
$$\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$
Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 1. En l'infini, l'idée est que le $\sqrt{\ln x}$ ne compte presque pas par rapport à $x^{3/2}$. Précisément, on écrit que
$$\lim_{x\to+\infty} x^{5/4}\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{1/4}} = 0.$$
Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction est intégrable sur $]1,+\infty[$.
3. La difficulté de cette question est qu'il est plus difficile d'avoir une intuition sur la façon dont se comporte $e^{-\sqrt{\ln t}}$. Soit $\alpha > 0$. On va comparer la fonction à $\frac{1}{t^\alpha}$. On a
$$e^{-\sqrt{\ln t}}t^\alpha = e^{-\sqrt{\ln t}+\alpha\ln t} \to +\infty.$$
Ainsi, en choisissant $\alpha = 1$, $\frac{1}{t} = o(e^{-\sqrt{\ln t}})$. Puisqu'on travaille avec des fonctions positives, et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$.

Exercice 13.

Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\textbf{1.}\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \qquad \textbf{2.}\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$$
$$\textbf{3.}\ \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt \qquad \textbf{4.}\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}dt$$

Correction.

1. Attention, ici il y a un problème à la fois en 0 et en $+\infty$. Comme l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ et qu'elle converge en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, on en déduit que l'intégrale n'est jamais convergente.
2. En 0, on a $e^{-t} - 1 \sim_0 -t$ et donc la fonction est équivalente à $\frac{-1}{t^{\alpha-1}}$. L'intégrale converge donc en 0 si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si $\alpha < 2$. Au voisinage de l'infini, le numérateur est équivalent à -1 (car il tend vers -1, attention à ne pas être perturbé par la fonction exponentielle qui n'intervient pas ici au voisinage de l'infini !). On en déduit que la fonction est équivalente en $+\infty$ à $\frac{-1}{t^\alpha}$ et donc l'intégrale converge au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. En résumé, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.
3. La fonction $t \mapsto \frac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En $+\infty$, elle est équivalente à $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$. Ainsi, l'intégrale est convergente au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 2$. Au voisinage de 0, il faut faire un développement limité du sinus pour trouver un équivalent du numérateur. On a
$$t - \sin t = t - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$
et donc la fonction est équivalente à $\frac{1}{6t^{\alpha-3}}$. L'intégrale est convergente en 0 si et seulement si $\alpha - 3 < 1$, donc si et seulement si $\alpha < 4$. On en déduit que l'intégrale entre 0 et $+\infty$ est convergente si et seulement si $\alpha \in]2,4[$.
4. Il y a deux problèmes, à la fois en 0 et en $+\infty$. En $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{\pi}{2t^\alpha}$, il y a donc convergence ssi $\alpha > 1$. En 0, puisque $\arctan t \sim_0 t$, la fonction est équivalente à $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$, il y a donc convergence ssi $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire ssi $\alpha < 2$. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}dt$ est donc convergente ssi $\alpha \in]1,2[$.

Exercice 14.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de
$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Correction.

1. Soit $\gamma \in]1,\alpha[$. Alors, on a
$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \to 0$$
et donc, en notant f la fonction, on a
$$f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$
Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f$.
2. Si $\alpha = 1$, alors la fonction est de la forme $u'u^{-\beta}$. Elle admet donc une primitive de la forme $\frac{1}{-\beta+1}u^{-\beta+1}$ si $\beta \neq 1$, et de la forme $\ln|\ln u|$ si $\beta = 1$. Pour $\beta \neq 1$, on a
$$\begin{aligned}\int_e^X \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} &= \left[\frac{1}{-\beta+1}(\ln t)^{-\beta+1}\right]_e^X \\ &= \frac{1}{-\beta+1}\big((\ln X)^{-\beta+1} - 1\big)\end{aligned}$$
Lorsque X tend vers $+\infty$, ceci admet une limite finie si et seulement si $\beta > 1$. Dans le cas où $\beta = 1$, la primitive se calcule un peu différemment :
$$\int_e^X \frac{dt}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_e^X = \ln|\ln X| - \ln|\ln e| = \ln\ln X.$$
Ceci tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale n'est pas convergente.
3. On remarque que
$$\frac{\frac{1}{t}}{f(t)} = t^{\alpha-1}(\ln t)^\beta \to 0,$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{t} =_{+\infty} o\big(f(t)\big).$$
Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f(t)dt$.

En conclusion, l'intégrale étudiée converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 15.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Correction.

La fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ est continue sur $]0,1]$. De plus, au voisinage de 0, on a
$$(\ln x)^n = o(1/\sqrt{x}).$$
Par comparaison avec une intégrale de Riemann, l'intégrale est convergente en 0. On va obtenir une formule de récurrence pour exprimer I_n en fonction de I_{n-1} en réalisant une intégration par

parties. Pour cela, prenons $a \in]0,1[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_a^1 (\ln x)^n dx &= [x(\ln x)^n]_a^1 - n\int_a^1 \frac{x(\ln x)^{n-1}}{x}dx\\ &= -a(\ln a)^n - n\int_a^1 (\ln x)^{n-1}dx.\end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0 et on obtient, puisque $a(\ln a)^n \to 0$ lorsque $a \to 0$,

$$I_n = -n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}dx = -nI_{n-1}.$$

Par récurrence, on prouve alors facilement que

$$I_n = (-1)^n n! I_0.$$

Or, $I_0 = 1$, et donc $I_n = (-1)^n n!$.

Exercice 16.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge, puis, avec le changement de variables $u = 1/t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$.
2. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt$.

Correction.

1. On va justifier, pour tout $a > 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt$. D'abord, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, on a l'équivalence
$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} \sim_0 \frac{\ln t}{a^2}$$
et on sait que $\ln t$ est intégrable en 0. De même, au voisinage de $+\infty$, on a
$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$
On en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}$. Le changement de variables $u = 1/t$ donne ensuite
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{-1}{u^2}du = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}du.$$
On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$.
2. Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variables $t = au$. On obtient
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln au}{a^2+a^2u^2}adu\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{a(1+u^2)}du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{a(1+u^2)}du.\end{aligned}$$

Utilisant le calcul précédent et le fait qu'une primitive de $\frac{1}{1+u^2}$ est $\arctan u$, on trouve finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Exercice 17.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$.

Correction.

1. Soit $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $[0,+\infty[$, et elle vérifie $|\frac{f(x)}{1+x^2}| \leq \frac{M}{1+x^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$ converge. De même, $x \mapsto \frac{f(1/x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $]0,+\infty[$ (attention, on n'a plus obligatoirement continuité en 0). Le problème en $+\infty$ se traite exactement comme précédemment, et en 0, il suffit d'observer que
$$\frac{|f(1/x)|}{1+x^2} \leq M,$$
et comme les fonctions constantes sont intégrables au voisinage de tout point, on a aussi prouvé la convergence de l'intégrale au voisinage de 0.
2. Effectuons le changement de variables $u = 1/x$. On trouve
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}dx = -\int_0^{+\infty} \frac{f(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{-1}{u^2}du = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx.$$
3. On applique le résultat des questions précédentes avec $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ (qui est bien continue et bornée sur $[0,+\infty[$). On trouve
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx := A.$$
Mais si on effectue la somme de ces deux intégrales, on trouve :
$$2A = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$
Ces deux intégrales sont donc égales à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 18.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. On suppose que f est intégrable sur $[0,+\infty[$. Démontrer que $\int_x^{x+1} f(t)dt \xrightarrow{x\to+\infty} 0$.

Correction.

Introduisons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. L'hypothèse d'intégrabilité entraine que F admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Mais par la relation de Chasles, on a

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = F(x+1) - F(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \ell - \ell = 0.$$

Exercice 19.

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient intégrables sur $[0,+\infty[$. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Correction.

On sait que $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Puisque f' est intégrable, f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en l'infini. Mais cette limite ne peut être que nulle. En effet, si $\ell \neq 0$, alors $f \sim_{+\infty} \ell$ et la fonction constante égale à ℓ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. Par comparaison, f ne serait pas intégrable, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc on a prouvé que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 20.

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

1. Démontrer que, pour tout $A > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \geq A$ tel que $|xf(x)| \leq \varepsilon$.
2. En déduire l'existence d'une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\big(x_n f(x_n)\big)$ tend vers 0.

Correction.

1. Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, il existe $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, $|xf(x)| \geq \varepsilon$ ce qui entraine
$$|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{x}.$$
Ceci contredit le fait que f est intégrable.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, appliquons le résultat de la question précédente avec $A = n$ et $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$. On obtient un réel x_n tel que $x_n \geq n$ et $|x_n f(x_n)| \leq 1/(n+1)$. La suite (x_n) vérifie donc bien les conditions imposées.

Exercice 21.

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\ \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \qquad \textbf{2.}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0, puisque $t \ln t \to 0$ lorsque t tend vers 0. De plus, au voisinage de $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{t \ln t}{t^{2\alpha}} = \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}$. On distingue alors deux cas : <ul class=”rien”>
2. Si $\alpha \leq 1$, alors $2\alpha - 1 \leq 1$, et donc $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{t}$ pour t assez grand. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente, on en déduit que l'intégrale est divergente.
3. Si $\alpha > 1$, alors $2\alpha - 1 > 1$. L'idée est que le terme le plus important est le dénominateur, $\frac{1}{t^{2\alpha-1}}$. Le logarithme au numérateur nous ennuie un peu, mais on va le traiter en réduisant un peu l'exposant du dénominateur. Précisément, soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < 2\alpha - 1$. Alors on a
$$t^\gamma \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = t^{-\delta} \ln t \to 0$$
avec $-\delta = \gamma - (2\alpha - 1) < 0$. On en déduit que
$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$
Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$ et par suite de $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$. En conclusion, l'intégrale est convergente ssi $\alpha > 1$.
4. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Il peut y avoir éventuellement deux problèmes, l'un en 0, l'autre en $+\infty$. Pour $\alpha \geq -1$, on a au voisinage de $+\infty$
$$f(x) \geq x^\alpha \geq 0.$$
Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ diverge (on a supposé $\alpha \geq -1$), il en est de même de $\int_0^{+\infty} f$. On peut donc se concentrer sur le cas $\alpha < -1$. Séparons alors l'étude en 0 et celle en $+\infty$.
   (a) En 0. On a $e^{\alpha x} \to 1$ et donc $\ln(1 + e^{\alpha x}) \to 0$. Pour en savoir un peu plus, il faut faire un développement limité. Utilisant $e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)$, on trouve
   $$f(x) = x^\alpha \ln\big(1 + (\alpha+1)x + o(x)\big) = x^\alpha\big((\alpha+1)x + o(x)\big) = (\alpha+1)x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}).$$
   On en déduit que $f \sim_0 (\alpha+1)x^{\alpha+1}$ (remarquons que $\alpha + 1 \neq 0$ puisque $\alpha < -1$). Puisqu'on a affaire à des fonctions qui gardent un signe constant, on en déduit que $\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\int_0^1 x^{\alpha+1} dx$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $-\alpha - 1 < 1$ soit $\alpha > -2$.
   (b) En $+\infty$. On fait un développement limité de $\ln(x + e^{\alpha x})$. Puisque $\alpha < -1$, on sait que $e^{\alpha x}$ tend vers 0 en $+\infty$, d'où
   $$\ln\left(x + e^{\alpha x}\right) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{x}\right) = \ln(x) + o(1).$$
   On en déduit que
   $$f(x) \sim_{+\infty} x^\alpha \ln x.$$

On se ramène à une intégrale de Bertrand. Rappelons pourquoi dans le cas particulier de l'exercice elle est convergente. Puisque $\alpha < -1$, on peut choisir $\gamma \in]\alpha, -1[$. Mais alors,

$$x^\alpha \ln x = o(x^\gamma) \text{ (faire le quotient des deux quantités)}$$

et comme $\int_1^{+\infty} x^\gamma dx$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} f$.

En conclusion, on a prouvé que l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha \in]-2, -1[$.

Exercice 22.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$

3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right) dx,\ a \in \mathbb{R}.$ **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$

Correction.

1. La fonction $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,1[$. Le problème de convergence de l'intégrale est donc en 1. Pour étudier ce problème, on fait un développement limité en 1 en posant $x = 1+u$. Lorsque x tend vers 1, u tend vers 0. De plus,

$$\begin{array}{rcl} 1-\sqrt{x} & = & 1-\sqrt{1+u} \\ & = & 1-\big(1+u/2+o(u)\big) \\ & = & -u/2+o(u) \\ & \sim_0 & (1-x). \end{array}$$

La fonction est donc équivalente en 1 à $\frac{1}{1-x}$. Cette dernière fonction n'est pas intégrable (c'est une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que $\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ est divergente.

2. La fonction que l'on cherche à intégrer est continue sur $[0,+\infty[$. Il faut étudier le problème en $+\infty$. Puisque $\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, il y a une forme indéterminée et le problème n'est pas trivial. On va faire un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{array}{rcl} \ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right) & = & -\ln\left(\dfrac{t+1}{t}\right) \\ & = & -\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \\ & = & -\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}+o\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \end{array}$$

On en déduit, en notant f la fonction, que, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(t) = 1-1+\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right) \implies f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{2t}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

3. On factorise par le terme dominant dans la racine, puis on effectue un développement limité de $(1+u)^\alpha$:
$$(x^4+x^2+1)^{1/2} = x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)^{1/2}.$$
On effectue le développement limité jusqu'aux termes en $1/x^4$. Posant
$$u = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$
on a
$$u^2 = \frac{1}{x^4}+o(1/x^4)$$
et donc
$$\begin{aligned} x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)^{1/2} &= x^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)-\frac{1}{8}\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\\ &= x^2\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\\ &= x^2+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$
De même, on prouve que
$$x\sqrt[3]{x^3+ax} = x^2+\frac{a}{3}+\frac{a^2}{9x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
En soustrayant les deux développements limités, et en notant f la fonction, on obtient que, au voisinage de $+\infty$, on a
$$f = \frac{1}{2}-\frac{a}{3}+\left(\frac{3}{8}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
On distingue alors deux cas : <ul class=”rien”>
4. Si $a\neq 3/2$, alors la fonction est équivalente à $\frac{1}{2}-\frac{a}{3}$, et donc l'intégrale est divergente.
5. Si $a=3/2$, la fonction est équivalente à $\frac{5}{8x^2}$, et donc l'intégrale est convergente.
6. La fonction $f : t\mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)$ est clairement continue sur $]0,+\infty[$. Pour étudier le problème en $+\infty$, il suffit de remarquer que
$$f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
au voisinage de $+\infty$, ce qui montre la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$. En 0, on fait un développement limité pour étudier le comportement. On a donc
$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t} &= \frac{1}{t-t^2/2+o(t^2)}-\frac{1}{t}\\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-t/2+o(t)}-1\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{2}+o(t)-1\right)\\ &= \frac{1}{2}+o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1/2$. Ceci achève de prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 23.

1. Montrer que les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont convergentes. On souhaite prouver que la fonction $\frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.
2. Méthode 1. Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \frac{1-\cos 2t}{2}$. En déduire le résultat.
3. Méthode 2. Prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin t| dt.$$

   Retrouver alors le résultat.

Correction.

1. C'est classique. On intègre par parties, en intégrant le sinus et en dérivant $1/t$ pour augmenter l'exposant au dénominateur. On obtient, pour $X > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\sin t}{t} dt &= \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= -\frac{\cos X}{X} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

   Lorsque $X \to +\infty$, $\frac{\cos X}{X}$ tend vers 0. De plus, on a

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

   et le terme à droite de l'inégalité est intégrable sur $[1, +\infty[$. En particulier, $\int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$ admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$. On en conclut qu'il en est de même de $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt$. Le raisonnement pour le cosinus est tout à fait semblable.
2. Il suffit de remarquer que, puisque $|\sin t| \leq 1$, on a

$$|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}.$$

   On en déduit, pour $X \geq 1$, que

$$\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_1^X \frac{1}{2t} dt - \int_1^X \frac{\cos 2t}{2t} dt.$$

   Or, on sait que $\int_1^X \frac{1}{2t} dt$ tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$ et que, d'après la question précédente, $\int_1^X \frac{\cos 2t}{2t} dt$ admet une limite (finie) lorsque X tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt$ tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.

3. Pour $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, on a
$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}.$$
Intégrant cette inégalité et utilisant la π-périodicité de $|\sin t|$, on en déduit que
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}dt = \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi |\sin t|dt.$$
En sommant ces intégrales pour k allant de 0 à n, et par la relation de Chasles, on trouve
$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \geq \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi}\right)\int_0^\pi |\sin t|dt.$$
Puisque la suite $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi}$ diverge vers $+\infty$ et que $\int_0^\pi |\sin t|dt \neq 0$, on en déduit que
$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \to +\infty.$$
Ceci reprouve la divergence de l'intégrale.

Exercice 24.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ converge.

1. Soit F une primitive de $t \mapsto f(t)e^{-s_0 t}$ sur $[0, +\infty[$. Démontrer que F est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $s > s_0$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge.
3. Sur le même modèle, démontrer que si $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}dt$ converge.

Correction.

1. F est une fonction continue sur $[0, +\infty[$. De plus, l'hypothèse de convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ implique que F admet une limite en $+\infty$. On en tire que F est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. Réalisons une intégration par parties en introduisant F et en écrivant
$$f(t)e^{-st} = f(t)e^{-s_0 t}e^{-(s-s_0)t}.$$
Pour $X > 0$, il vient
$$\int_0^X f(t)e^{-st}dt = F(X)e^{-(s-s_0)X} + (s - s_0)\int_0^X F(t)e^{-(s-s_0)t}dt.$$
Puisque F est bornée,
$$F(X)e^{-(s-s_0)X} \xrightarrow{X \to +\infty} 0.$$
Toujours parce que F est bornée, on a
$$F(t)e^{-(s-s_0)t} =_{+\infty} O(e^{-(s-s_0)t}).$$

Or, $-(s-s_0)<0$ et donc la fonction $e^{-(s-s_0)t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison, il en est de même de $F(t)e^{-(s-s_0)t}$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^X f(t)e^{-st}dt$ admet une limite finie quand X tend vers $+\infty$, ce qui signifie exactement que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge.

3. On note cette fois G une primitive de g, qui est une fonction bornée. Par une intégration par parties, on trouve pour $X>1$
$$\int_1^X \frac{g(t)}{t}dt=\frac{g(X)}{X^2}-\frac{g(1)}{1}+\int_1^X\frac{G(t)}{t^2}dt.$$
On conclut exactement comme à la question précédente.

Exercice 25.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{1}{1+x^4\sin^2 x}.$$
Démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Correction.

La fonction f est paire. Il suffit de prouver son intégrabilité sur $[0,+\infty[$. De plus, comme f est positive, il suffit de prouver la convergence de la série $\sum_k I_k$, avec $I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$. Mais on a
$$\begin{aligned}
I_k &\leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{dx}{1+(k\pi)^4\sin^2 x} \text{ car } x\geq k\pi\\
&\leq \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(k\pi)^4\sin^2 x} \text{ par } \pi\text{-périodicité de } \sin^2 x\\
&\leq 2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(k\pi)^4\sin^2 x}\\
&\leq 2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(k\pi)^4\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2} \text{ car } \sin t\geq\frac{2x}{\pi}\\
&\leq 2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+4k^4\pi^2x^2}
\end{aligned}$$
Faisant le changement de variables $u=4k^2\pi x$, on trouve
$$I_k\leq\frac{1}{4k^2\pi}\int_0^{2k^2\pi^2}\frac{du}{1+u^2}\leq\frac{1}{4k^2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}.$$
On en déduit la convergence de la série $\sum_k I_k$, et donc le fait que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.