Feuille d'exercices n°21

1. Exercices basiques

Exercice 1.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $F'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 2.

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire un équivalent de f en 0.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3.

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose
$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}.$$

1. Justifier l'existence de $I_n(x)$.
2. Calculer $I_1(x)$.
3. Démontrer que I_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et former une relation entre $I_n'(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
4. En déduire qu'il existe une suite (λ_n) telle que, pour tout $x > 0$, on a
$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}.$$
Que vaut λ_n ?

Exercice 4.

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Démontrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Justifier que F tend vers 0 en $+\infty$.
3. Démontrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{x}$.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 5.

Pour $x > 0$, on définit

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} dt.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$, valable pour $t \in [0, \pi/2]$, démontrer que

$$f(x) \sim_{0^+} -\ln x.$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 6.

Soient $a, b > 0$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

1. Justifier l'existence de $F(x)$.
2. Prouver que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
3. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2}\right) + C.$$

4. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) dt,$$

   où $\psi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$.
5. En déduire la valeur de C.

Exercice 7.

On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x).$$
2. En déduire que pour tout x réel, $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$, puis que
$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \pi$.

Exercice 8.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$
On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules
$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 9.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose
$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$
Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.
   (b) En déduire que Γ est C^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer que Γ est convexe.
5. (a) Justifier que, pour tout $u < -1$, $\ln(1-u) \leq -u$.
   (b) Pour $x > 0$, on pose
$$f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}(1 - t/n)^n & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \Gamma(x)$.

6. En déduire que pour $x > 0$, on a
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du.$$
7. En utilisant des intégrations par parties successives, conclure que, pour tout $x > 0$, on a
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle
$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$
3. Démontrer que f est développable en série entière.

Exercice 11.

Soit f une application définie sur $[0, 1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t)dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.
2. En déduire la valeur de
$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 f^\alpha(t)dt\right)^{1/\alpha}.$$

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 12.

On pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et démontrer que F est continue sur ce domaine de définition.

2. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et démontrer que, pour tout $x>1$,

$$F'(x)=\int_1^{+\infty}\frac{t^x\ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt.$$

   En déduire le sens de variation de F.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. On suppose que F admet une limite ℓ en 1^+. Démontrer que pour tout $A>0$ et tout $x>1$, on a

$$\ell\geq\int_1^A\frac{dt}{1+t^x}.$$

5. En déduire que $\lim_{x\to1^+}F(x)=+\infty$.

Exercice 13.

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}/2$.

Exercice 14.

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $Lf(x)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt$.

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-yt}dt$ converge pour $y>x$.
2. Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf ?
3. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}Lf(x)=0$.

Exercice 15.

Soient I un intervalle, $f:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $u,v:I\to\mathbb{R}$ continues. Démontrer que $F:x\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)}f(x,t)dt$ est continue sur I.