# Feuille d'exercices n°2

**Exercice 1.**

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$. On considère $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Quels sont les éléments de la tribu $\mathcal{T}$ ?

**Exercice 2.**

On tire trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs ?
2. que des as ?
3. deux coeurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

**Exercice 3.**

On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.

1. Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair.
3. Reprendre les questions si cette fois le dé est pipé de sorte que la probabilité d'une face paire soit le double de la probabilité d'une face impaire.

**Exercice 4.**

Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à $k^2$.

**Exercice 5.**

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

**Exercice 6.**

Émile est un excellent footballeur. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à $2/3$. Paulin est un peu moins fort. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à $1/2$. Émile lance un défi à Paulin. Chacun va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Paulin. Le premier qui marque a gagné. Quelle est la probabilité que Émile gagne ?

**Exercice 7.**

Des joueurs $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose $A_1$ et $A_2$ et, à l'étape $n$, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur $A_{n+1}$. Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape $n$ ait lieu ?
2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
3. Quelle est la probabilité que le joueur $A_n$ gagne ?

**Exercice 8.**

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note $X$ la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de $X$, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de $Y$, et son espérance.

**Exercice 9.**

Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne $k$ est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Le joueur gagne $k$ euros s'il atteint la couronne numérotée $k$ pour $k$ compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

**Exercice 10.**

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note $X$ le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$.

**Exercice 11.**

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère $X$ la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture.

On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \quad P(X = 1) = 0,3 \quad P(X = 2) = 0,4 \quad P(X = 3) = 0,2.$$

1. On note $Z$ le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de $Z$. On pourra considérer dans la suite que $X$ et $Z$ sont indépendantes.
2. On note $Y$ la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de $Y$.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

**Exercice 12.**

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie $M$ avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie $M$ dans une étable de de $n$ vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

1. Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
2. Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des $n$ vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note $X_n$ la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième étape. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de $Y_n$, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers $n$ tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de $n$) à la question posée).

**Exercice 13.**

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut $p$. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir $r$ fois pile. Quelle est la loi de $X$ ?

**Exercice 14.**

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note $p_n$ la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de $p_2$, $p_3$, $p_4$.
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de $p_n$ pour tout $n$.

4. Rappeler, pour $q \in ]-1,1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

**Exercice 15.**

Soit $p \in ]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité $p$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit $X$ le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Montrer que $X$ admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si $X$ prend la valeur $n$, on place $n+1$ boules numérotées de $0$ à $n$ dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors $Y$ le numéro obtenu. Déterminer la loi de $Y$. Calculer l'espérance de $Y$.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de $Z$ et vérifier que $Z$ et $Y$ sont indépendantes.

**Exercice 16.**

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ change d'état de la manière suivante :

1. à l'instant $t = 0$, le spot $S_1$ est allumé.
2. si, à l'instant $t = n,\ n \geq 0$, le spot $S_1$ est allumé, alors un (et un seul) des spots $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable.
3. si, à l'instant $t = n,\ n \geq 0$, le spot $S_k$ $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot $S_{k-1}$ s'allume à l'instant $t = n+1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note $X$ la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot $S_2$ s'allume.

1. Écrire un algorithme simulant le fonctionnement de la variable aléatoire $X$. On supposera que l'on dispose d'une fonction ALEA(a,b) qui simule une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b\}$.
2. Calculer la probabilité pour que le spot $S_1$ reste constamment allumé jusqu'à l'instant $n$.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
4. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$.
5. Déterminer l'espérance de $X$.

**Exercice 17.**

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note $X_i$ le nombre de points perdus le jour $i$.

1. Question préliminaire : soit $x \in ]-1,1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Justifier que
$$\sum_{n \geq r} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$
2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Que représente $S_n$ ? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
3. En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note $T$ le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de $T$ ? Son espérance ?

**Exercice 18.**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda$ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.

**Exercice 19.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

**Exercice 20.**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires. On suppose que $X$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de $Y$ conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de $Y$ ?

**Exercice 21.**

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage $A$ et $B$ qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que $A$ produit 60% des objets et $B$ produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine $A$ soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine $B$ soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par $A$ est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire $X$ représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine $A$ en une heure.
   (a) Rappeler la loi de $Y$ ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de $Y$.
   (b) Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k | Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que $X$ suit une

loi de Poisson de paramètre 2 .

**Exercice 22.**

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

**Exercice 23.**

On lance une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile soit égale à $p$. On répète cette expérience de façon indépendante et on note $X$ la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient pile.

1. Écrire un algorithme qui simule cette variable aléatoire.
2. Modifier l'algorithme précédent de sorte qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de l'espérance de cette variable aléatoire.

**Exercice 24.**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs $p$ et $q$. Calculer $P(Y > X)$.

**Exercice 25.**

Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que $A$ soit diagonalisable ?

**Exercice 26.**

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truque et la probabilité d'obtenir 6 est $p$, avec $0 < p < 1$. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

1. Quelle est la loi de $X$ ?
2. En déduire la probabilité de gagner de chacun des joueurs.

**Exercice 27.**

Deux joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un 6. La partie s'arrête alors et le joueur qui a obtenu un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité qu'il tombe sur 6 vaut $p$, avec $0 < p < 1$. On cherche à calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs. On note $G_1$ l'évènement "le joueur 1 gagne" et $G_2$ l'évènement "le joueur 2 gagne".

1. Montrer que $P(G_2) = (1-p)P(G_1)$.
2. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$.