Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°23

1. Variables aléatoires discrètes

Exercice 1.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 2.

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$
2. Application : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100 ?

Exercice 4.

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

1. ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
2. ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de X_n ? Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ? Établir une formule de récurrence liant p_k et p_{k-1}. En déduire la valeur

de p_k pour $k \geq 1$.

3. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Z_n.

Exercice 5.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = \frac{a}{2^{i+j}},$$

pour tous i, j de $\mathbb{N}^*$.

1. Calculer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 7.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On répète un certain nombre de fois le protocole suivant : on tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est blanche, on arrête. Si elle est noire, on la remet dans l'urne, et on ajoute une boule blanche. On note Y la variable aléatoire correspondant au rang du tirage d'une boule blanche. On convient que $Y = 0$ si les tirages n'amènent jamais une boule blanche.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que l'on réalise au plus trois tirages.
   (a) Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. On suppose désormais, et jusqu'à la fin de l'exercice, qu'on répète les tirages jusqu'à obtention d'une boule blanche. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
3. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Y.
4. On note A_k l'événement "la k-ième boule tirée est noire". Exprimer l'événement "$Y = k$" en fonction des événements $A_1, \dots, A_k$.
5. Pour $j \geq 2$, calculer $P(A_j | A_1 \cap \dots \cap A_{j-1})$ et $P(\overline{A_j} | A_1 \cap \dots \cap A_{j-1})$.
6. En déduire, pour $k \geq 1$, la valeur de $P(Y = k)$.
7. Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!}$, puis démontrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+1)!} = 1$.
8. Quelle est la probabilité pour que l'on ne tire jamais de boule blanche ?

Exercice 8.

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 9.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$
   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.
   (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que
   $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$
2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
   (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 10.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 11.

1. Démontrer que toutes les racines (complexes) non-nulles du polynôme $P(X) = X^2 + X^3 + \cdots + X^{12}$ sont simples.
2. Peut-on truquer un dé de sorte que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros

obtenus suive la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$?

Exercice 12.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k sont tels que la suite (p_n) définie, pour $n \geq 0$, par $p_n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

2. Systèmes différentiels

Exercice 13.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{1.} \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array} \right. \qquad \textbf{2.} \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y + z \\ y' & = & -x + 2y + z \\ z' & = & x + z \end{array} \right.$$

Exercice 14.

Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\textbf{1}.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2}.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\textbf{1}.\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2}.\ A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

Exercice 17.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\left\{\begin{array}{lll} x_1'(t) & = & 6x_1(t)+3x_2(t)-3t+4e^{3t} \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-x_2(t)+4t-4e^{3t} \end{array}\right.$ **2.** $\left\{\begin{array}{lll} x_1'(t) & = & x_1(t)+2x_2(t)+t \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-3x_2(t). \end{array}\right.$

On donnera les solutions réelles.

3. Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 18.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''-2y'+y=x$, $y(0)=y'(0)=0$;
2. $y''+9y=x+1$, $y(0)=0$;
3. $y''-2y'+y=\sin^2 x$;

Exercice 19.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x},\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Exercice 20.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y"{-}3xy'+4y=0.\ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $z(t)=y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t\in\mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x=e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire le "portrait robot" de y.
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Exercice 21.

Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2-3)y''-4xy'+6y=0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22.

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$(t^2+t)x''+(t-1)x'-x=0.$$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$.
3. Reprendre le même exercice avec

$$x^2y''-3xy'+4y=x^3$$

dont on déterminera les solutions sur $]0,+\infty[$. On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !

Exercice 23.

On considère l'équation différentielle

$$xy''-y'+4x^3y=0 \qquad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Question préliminaire : soient a,b,c,d 4 réels et $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} a\cos(x^2)+b\sin(x^2) & \text{si } x>0 \\ c\cos(x^2)+d\sin(x^2) & \text{si } x<0 \end{cases}$$

A quelle condition sur a,b,c,d la fonction f se prolonge-t-elle en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$? On recherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.
3. Pour $p\in\mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.
4. Pour $p\in\mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et p).
5. Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".
6. Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.

Exercice 24.

Pour les équations différentielles suivantes :

1. Chercher les solutions développables en séries entières
2. Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode du wronskien
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

1. $xy'' + 2y' - xy = 0$ **2**. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$