Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°22

Exercice 1.

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$. On considère $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Quels sont les éléments de la tribu $\mathcal{T}$?

Correction.

Il est facile de voir que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\{n\} = S_{n-2} \cap S_{n-1} \cap S_n.$$

Puisque toute partie de $\mathbb{Z}$ est réunion dénombrable de singletons, et qu'une tribu est stable par passage à la réunion dénombrable, on en déduit finalement que $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Exercice 2.

On tire trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs ?
2. que des as ?
3. deux coeurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

Correction.

1. Le nombre de tirages possible est $\binom{8}{3}$. Le nombre total de tirages est $\binom{32}{3}$. La probabilité recherchée est donc
$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{32 \times 31 \times 30} = \frac{7}{620}.$$
2. Le raisonnement est identique. On obtient
$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30} = \frac{1}{1240}.$$
3. Le nombre de tirages possibles est $\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}$. La probabilité recherchée est donc
$$\frac{\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{7}{155}.$$

Exercice 3.

On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.

1. Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair.
3. Reprendre les questions si cette fois le dé est pipé de sorte que la probabilité d'une face paire soit le double de la probabilité d'une face impaire.

Correction.

1. L'univers le plus naturel à associer à l'expérience est $\{1,\dots,6\}$. Soit $\mathbb{P}$ la probabilité modélisant l'expérience aléatoire. L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}(\{i\}) = \lambda \times i$. Le problème est de déterminer λ. Pour cela, on remarque que
$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 1.$$
Mais,
$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 21\lambda.$$
On doit donc avoir $\lambda = \frac{1}{21}$.
2. On a
$$\mathbb{P}(\{\text{obtenir un chiffre pair}\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$
3. L'univers est le même. Posons cette fois $\lambda = \mathbb{P}(\{1\})$. Alors on doit avoir
$$\mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = 2\lambda$$
et
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \lambda.$$
Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on doit avoir
$$3\lambda + 6\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{9}.$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}(\{\text{obtenir un chiffre pair}\}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 4.

Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1,\dots,n\}$ telle que la probabilité de $\{1,\dots,k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Correction.

L'énoncé nous dit que l'on cherche une probabilité P telle que $P(\{1,\dots,k\}) = \lambda k^2$. On a alors, pour $k=1,\dots,n$,

$$P(\{k\}) = P(\{1,\dots,k\}) - P(\{1,\dots,k-1\}) = \lambda k^2 - \lambda(k-1)^2 = 2\lambda k - \lambda.$$

On va déterminer λ en remarquant que

$$P(\{1,\dots,n\}) = 1$$

ce qui entraîne

$$\lambda n^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{n^2}.$$

La probabilité est donc définie par

$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

On vérifie aisément que réciproquement, cette probabilité vérifie que $P(\{1,\dots,k\})$ est proportionnelle à k^2.

Exercice 5.

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Correction.

On considère A_n l'événement défini par "les $n-1$ premiers lancers donnent 2 ou 4 et le n-ième lancer donne 6". L'événement étudié est $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Ces événements étant disjoints, on a $P(A) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$. Par indépendance des lancers, on a

$$P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}.$$

On en déduit que

$$P(A) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 6.

Émile est un excellent footballeur. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à 2/3. Paulin est un peu moins fort. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à 1/2. Émile lance un défi à Paulin. Chacun va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Paulin. Le premier qui marque a gagné. Quelle est la probabilité que Émile gagne ?

Correction.

Notons A_n l'événement : "Émile et Paulin ratent leurs $n-1$ premiers tirs, Paulin rate son n-ième tir, et Émile réussit son n-ième tir". Alors les événements A_n sont disjoints et leur réunion est l'événement "Émile gagne" que l'on note désormais A. On a donc

$$P(A) = \sum_{n\geq 1} P(A_n).$$

Mais on a

$$P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3}.$$

Il vient

$$P(A) = \sum_{n\geq 1} 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = 2\frac{1/6}{1-1/6} = \frac{2}{5},$$

où on a utilisé la somme d'une série géométrique.

Exercice 7.

Des joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2 et, à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur A_{n+1}. Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape n ait lieu ?
2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
3. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

Correction.

1. Notons E_n l'événement "la n-ième étape a lieu". On a $P(E_1) = 1$ et $P(E_2) = 1$. Ensuite, pour $n \geq 3$, si la $n-1$-ième étape a eu lieu, il y a une probabilité $1/2$ que l'on s'arrête là (le joueur qui avait remporté la manche précédente remporte une deuxième manche consécutive) et une probabilité $1/2$ que l'on continue. Ainsi, $P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1})$ d'où l'on déduit que, pour tout $n \geq 2$, on a $P(E_n) = \frac{1}{2^{n-2}}$.
2. Notons F_n l'événement : "Le jeu s'arrête à l'étape n". On a

$$P(F_n) = P(E_n) - P(E_{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

si $n \geq 2$, et $P(F_1) = 0$. Les événements F_n étant incompatibles, on en déduit que

$$P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(F_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1.$$

Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement (avec une probabilité 1).
3. Remarquons d'abord que la probabilité que A_1 ou que A_2 gagne vaut $1/4$. Pour $n \geq 3$, A_n joue si et seulement si l'étape $n-1$ a lieu, et donc A_n joue avec une probabilité valant $\frac{1}{2^{n-3}}$. Et lorsque A_n joue, il a une probabilité $1/4$ de gagner. En conclusion,

$$P(A_n \text{ gagne}) = \frac{1}{4}P(A_n \text{ joue}) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 8.

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Correction.

1. X prend ses valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$. Par hypothèse, il existe un réel a tel que $P(X = k) = ka$. Maintenant, puisque P_X est une loi de probabilité, on a :

$$\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1 \iff a\frac{6 \times 7}{2} = 1 \implies a = 1/21.$$

On a donc :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On vérifie aisément en appliquant la formule $E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k)$ que $E(X) = \frac{13}{3}$.

2. On a $Y = k \iff X = 1/k$. Y prend donc ses valeurs dans $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6\}$, et la loi est donnée par :

$1/k$	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$
$P(Y = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Le calcul de l'espérance n'est pas plus difficile, et donne :

$$E(Y) = \frac{2}{7}.$$

Attention à l'erreur suivante : ce n'est pas parce que $Y = 1/X$ que $E(Y) = 1/E(X)$!!!.

Exercice 9.

Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Correction.

1. On note A_k l'aire de la couronne k, et A l'aire totale. Par les hypothèses d'équiprobabilité faites dans l'énoncé, on a
$$P(X=k)=\frac{A_k}{A}$$
pour k compris entre 1 et 10. Pour la couronne k, le cercle extérieur est de rayon $11-k$ et le cercle intérieure de rayon $10-k$ (un petit dessin pourra aider pour faire attention à l'inversion entre l'ordre des cercles et les rayons). On a donc, en cm^2, $A_k=\pi\big((11-k)^2-(10-k)^2\big)=\pi(21-2k)$. On en déduit que
$$P(X=k)=\frac{21-2k}{100}.$$

2. Notons Y la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur. Y prend ses valeurs dans $-2,6,7,8,9,10$. L'événement "$Y=-2$" est égal à l'événement "$X\leq 5$", et donc
$$P(Y=-2)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{75}{100}$$
d'après le résultat de la question précédente. D'autre part, pour $k=6,\dots,10$, on a
$$P(Y=k)=P(X=k).$$
On en déduit le calcul de l'espérance de Y :
$$E(Y)=-2\times\frac{75}{100}+\frac{6\times 9+7\times 7+8\times 5+9\times 3+10\times 1}{100}=\frac{3}{10}.$$
L'espérance est positive. Le jeu est favorable au joueur. En moyenne, il peut espérer gagne 0,3 euros par partie.

Exercice 10.

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Correction.

On choisit pour univers $\Omega=\{1,\dots,6\}^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés. Remarquons que le cardinal de Ω vaut 36. X prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. L'événement $X=1$ est égal à $\{(1,1)\}$ et donc
$$P(X=1)=\frac{1}{36}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P\big(\{(1,2);(2,1);(2,2)\}\big) = \frac{1}{12} \\
P(X=3) &= P\big(\{(1,3);(2,3);(3,3);(3,1);(3,2)\}\big) = \frac{5}{36} \\
P(X=4) &= P\big(\{(1,4);(2,4);(3,4);(4,4);(4,3);(4,2);(4,1)\}\big) = \frac{7}{36} \\
P(X=5) &= P\big(\{(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(5,5);(5,4);(5,3);(5,2);(5,1)\}\big) = \frac{1}{4} \\
P(X=6) &= P\big(\{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,5);(6,4);(6,3);(6,2);(6,1)\}\big) = \frac{11}{36}.
\end{aligned}$$

Exercice 11.

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ avec

$$P(X=0) = 0,1 \quad P(X=1) = 0,3 \quad P(X=2) = 0,4 \quad P(X=3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Correction.

1. Z est élément de $\{0,1,2\}$. On a :

$$P(Z=2) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,

$$P(Z=0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :

$$P(Z=1) = 1 - P(Z=0) - P(Z=2) = \frac{8}{25}.$$

On aurait aussi pu directement remarquer que Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, 4/5)$.

2. Remarquons que Y est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement $Y = 0$ se produit si $X = 0$ ou bien si $X \geq 1$ et $Z = 0$. Ces deux événements étant disjoints, on a :

$$P(Y=0) = P(X=0) + P(X \geq 1 \cap Z = 0) = P(X=0) + P(X \geq 1)P(Z=0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y=0) = 0,1 + 0,9 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,136.$$

De même, l'événement $Y = 1$ se produit si $X = 1$ et $Z \geq 1$ ou bien si $X \geq 2$ et $Z = 1$. On en déduit :

$$P(Y=1) = P(X=1)P(Z \geq 1) + P(X \geq 2)P(Z=1) = 0,48.$$

Enfin, l'événement $Y = 2$ est réalisé si $X \geq 2$ et $Z = 2$. Ceci donne :

$$P(Y=2) = P(X \geq 2)P(Z=2) = 0,6 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,384.$$

3. La marge brute vaut $300Y$. La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y) = 300(0 \times 0,136 + 1 \times 0,48 + 2 \times 0,384) = 374,4.$$

Exercice 12.

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

1. Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
2. Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième étape. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée).

Correction.

1. Y_n ne prend que deux valeurs, $1/n$ et $1 + 1/n$. On a en outre :

$$(Y_n = 1/n) \iff \text{aucune vache n'est malade}$$

d'où $P(Y_n = 1/n) = 0,85^n$. On en déduit - la loi de Y est une loi de probabilité - $P(Y = 1 + 1/n) = 1 - (0,85)^n$. Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Y_n) = \frac{0,85^n}{n} + \frac{n+1}{n}(1 - 0,85^n) = 1 + \frac{1}{n} - 0,85^n.$$

2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et $f'(x)=\frac{1+ax}{x}$. $f'(x)$ est donc du signe de $1+ax$, ce qui permet de dire que f est croissante sur $]0,-1/a[$, et décroissante ensuite. La limite de f en $+\infty$ est $-\infty$, il en est de même en 0. En calculant les valeurs successives de $f(n)$, on a $f(17)>0,07$ et $f(18)<-0,03$. 17 est donc la plus grande valeur entière pour laquelle $f(n)$ est positive. En outre, $f(1)<0$ alors que $f(2)>0$. L'ensemble d'entiers recherché est donc $\{2,\dots,17\}$.
3. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n)<1 &\iff 1+\frac{1}{n}-0,85^n<1\\ &\iff 0,85^n>\frac{1}{n}\\ &\iff n\ln(0,85)>-\ln n. \end{aligned}$$

Par suite, $E(Y_n)<1 \iff f(n)>0$. L'étude précédente montre que les entiers n pour lesquels $f(n)>0$ est $\{2,\dots,17\}$. On a intérêt à choisir la deuxième méthode si, et seulement si, il y a de 2 à 17 vaches dans l'étable !

Exercice 13.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Correction.

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r,r+1,\dots,\}$. Soit $k\geq r$. Remarquons que si $X=k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X=k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}.$$

Exercice 14.

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n\geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X=n)$.

1. Expliciter les événements $(X=2)$, $(X=3)$, $(X=4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n=\frac{2}{9}p_{n-2}+\frac{1}{3}p_{n-1}$, $n\geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $q\in]-1,1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty}nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.

Correction.

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au $k-$ième lancer. L'événement $(X=2)$ correspond à :

$$(X=2)=P_1P_2 \implies p_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

De même,

$$(X=3)=F_1P_2P_3 \implies p_2=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Pour $(X=4)$, cela se corse un peu !

$$(X=4)=F_1F_2P_3P_4\cup P_1F_2P_3P_4 \implies p_4=\frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 : pour obtenir $X=n$, on peut :
   (a) ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer (proba $2/3$). Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X=2$), donc avec encore une probabilité de $2/3$. Maintenant, il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$ième. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}.
   (b) ou bien avoir obtenu face au 1er lancer (proba $1/3$). Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ième, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}.

   D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n=\frac{2}{9}p_{n-2}+\frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2=r/3+2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement que, pour $n\geq 2$, on a

$$p_n=\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n+\beta\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes (p_2 et p_3). On obtient :

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $n=1$ puisqu'on a alors $p_1=0$.

4. Il est bien connu que pour tout $q\in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}nq^n=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

On en déduit :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}np_n=\frac{15}{4}.$$

En moyenne, si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, il faudra $15/4$ lancers (non entier !) pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs.

Exercice 15.

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Correction.

1. L'événement $X = n$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $n+2$-ième tirage donne un pile. Il y a donc $n+1$ choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire a une probabilité qui vaut $p^2(1-p)^n$. On a donc :
$$P(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n.$$
2. La série définisant $E(X)$ est évidemment convergente, et sa sommation est facile (si elle vous semble difficile, il faut réviser comment faire, par exemple en utilisant les séries entières). On trouve :
$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{2(1-p)}{p}.$$
3. Si $n \geq 1$ est fixé, et $k \in \{0, \dots, n\}$, on a clairement :
$$P(Y = k|X = n) = \frac{1}{n+1}.$$
Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k|X = n)P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (n+1)p^2(1-p)^n \frac{1}{n+1} = p(1-p)^k. \end{aligned}$$
On reconnait que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p. On a donc :
$$E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$
Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.
4. On a :
$$(Z = h) = \bigcup_{j=0}^{\infty} [(Y = j) \cap (X = h + j)].$$

Cette réunion étant disjointe, il vient :

$$\begin{aligned} P(Z=h) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(Y=j|X=h+j)P(X=h+j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^2(1-p)^{h+j} \\ &= p(1-p)^h. \end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} P[(Z=h),(Y=j)] &= P(X=h+j, Y=j) = P(Y=j|X=h+j)P(X=h+j) \\ &= p^2(1-p)^{h+j}. \end{aligned}$$

Ceci est égal à $P(Z=h) \times P(Y=j)$. Les variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 16.

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ change d'état de la manière suivante :

1. à l'instant $t=0$, le spot S_1 est allumé.
2. si, à l'instant $t=n,\ n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ s'allume à l'instant $t=n+1$, et ceci de manière équiprobable.
3. si, à l'instant $t=n,\ n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t=n+1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Écrire un algorithme simulant le fonctionnement de la variable aléatoire X. On supposera que l'on dispose d'une fonction ALEA(a,b) qui simule une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b\}$.
2. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n.
3. Calculer la probabilité des événements $(X=1)$ et $(X=2)$.
4. Calculer la probabilité des événements $(X=n)$, pour $n \geq 3$.
5. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 17.

Tous les jours, Rémi fait le trajet entre son domicile et son travail. Un jour sur deux, il dépasse la vitesse autorisée. Un jour sur dix, un contrôle radar est effectué. On suppose que ces deux événements (dépassement de la vitesse limite et contrôle radar) sont indépendants, et que leur survenue un jour donné ne dépend pas de ce qui se passe les autres jours. Si le radar enregistre son excès de vitesse, Rémi perd un point sur son permis de conduite. On note X_i le nombre de points perdus le jour i.

1. Question préliminaire : soit $x \in]-1,1[$ et $r \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\sum_{n\geq r} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Que représente S_n ? Donner sa loi, son espérance, sa variance.
3. En tant que jeune conducteur, Rémi ne dispose que de 6 points sur son permis. On note T le nombre de jours de validité de son permis dans le cas où celui-ci lui est retiré. Sinon, on définit $T = 0$. Quelle est la loi de T ? Son espérance ?

Correction.

1. On rappelle que la série géométrique $S(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à 1. Sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$. Le résultat vient alors du calcul de la r-ième dérivée de cette série entière (rappelons que l'on peut dériver terme à terme une série entière dans son intervalle ouvert de convergence).
2. S_n représente le nombre de points perdus après n jours. Chaque X_i est une variable aléatoire de Bernoulli, indépendante. De plus,

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

par indépendance des événements "dépasser la vitesse" et "être contrôlé". S_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{20}$. Par les formules du cours, on a

$$E(S_n) = \frac{n}{20},\ V(S_n) = \frac{1\times 19}{20\times 20}n = \frac{19}{400}n.$$

3. T prend, outre la valeur 0, des valeurs $n \geq 6$. On a $T = n$ si et seulement si $S_{n-1} = 5$ et $X_n = 1$. Par indépendance de ces événements, on a donc pour $n \geq 6$,

$$P(T=n) = P(S_{n-1}=5)P(X_n=1) = \binom{n-1}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^6\left(\frac{19}{20}\right)^{n-6}.$$

Reste à calculer $P(T=0)$. On a

$$P(T=0) = 1 - \sum_{n\geq 6} P(T=n).$$

Mais, d'après le rappel effectué à la première question,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 6} P(T=n) &= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n\geq 6}(n-1)\cdots(n-5)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-6} \\
&= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n\geq 5} n\cdots(n-5+1)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-5} \\
&= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \frac{5!}{(1-\frac{19}{20})^6} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(T=0)=0$, ce qui signifie que Rémi va perdre presque sûrement son permis. Le calcul de l'espérance suit la même méthode :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 6} nP(T=n) &= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \sum_{n\geq 6} n(n-1)\dots(n-5)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-6} \\
&= \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{20}\right)^6 \frac{6!}{\left(1-\frac{19}{20}\right)^7} \\
&= 120.
\end{aligned}$$

En moyenne, Rémi va conserver son permis à peine 4 mois !

Exercice 18.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X=k))$ soit décroissante.

Correction.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a
$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\lambda}{k+1}.$$
La suite est décroissante si et seulement si ce rapport est toujours inférieur ou égal à 1. Il atteint sa valeur maximale pour $k=0$, et donc la suite est décroissante si et seulement si $\lambda\leq 1$.

Exercice 19.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k\in\mathbb{N}$ la probabilité $P(X=k)$ est maximale ?

Correction.

On a
$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\lambda}{k+1}$$
d'où
$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}\geq 1 \iff k\leq \lambda-1.$$
On distingue alors trois cas :

1. Si $\lambda-1<0$, c'est-à-dire $\lambda\in]0,1[$, la suite $(P(X=k))$ est strictement décroissante, et donc son maximum est atteint en $P(X=0)$.
2. si λ est un entier, la suite est strictement croissante juste $\lambda-1$, strictement décroissante à partir de λ et le maximum est atteint en deux points : $P(X=\lambda-1)$ et $P(X=\lambda)$.
3. Si λ n'est pas un entier, la suite est strictement croissante jusque $\lfloor \lambda-1\rfloor$, puis strictement décroissante ensuite. La valeur maximale est donc $P(X=\lfloor \lambda-1\rfloor)$.

Exercice 20.

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de Y ?

Correction.

On remarque d'abord que Y est à valeurs entières. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k|X = n)P(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{e^{-p\lambda} (\lambda p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Y suit donc une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 21.

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k|Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Correction.

1. Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$ Soit D ="l'objet est défectueux". On a $P(D|A) = 0.1$ et $P(D|B) = 0.2$ et comme (A, B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) \\ &= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.14. \end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine A" est $P(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine A en une heure.
   (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$
   (b) Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n, qui sont défectueux indépendemment les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et 0.1. En particulier, $P[X = k|Y = n] = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$ et $P[X = k|Y = n] = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$
   (c) Comme $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = k|Y = n] P(Y = n)$$

   série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n \geq k$

ou $n < k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M} P\left[X = k|Y = n\right] P\left(Y = n\right) &= \sum_{n=0}^{k-1} P\left[X = k|Y = n\right] P\left(Y = n\right) \\
&\quad + \sum_{n=k}^{M} P\left[X = k|Y = n\right] P\left(Y = n\right) \\
&= 0 + \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\
&= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!\,(n-k)!n!} \left(0.9 \cdot 20\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{M} \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\
&\to \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}
\end{aligned}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(2\right)$

Exercice 22.

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Correction.

1. Soit X le nombre de piles obtenus au cours de 10 lancers. X est le nombre de réalisations de l'événement "le lancer donne pile" de probabilité constante 0,3 au cours de 10 lancers indépendants. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. On en déduit : $P(X = 3) = \binom{10}{3}(0,3)^3(1 - 0,3)^{10-3} \simeq 0,27$.
2. Soit Y le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention de pile pour la première fois. Y est le temps d'attente de la première réalisation de l'événement "obtenir pile" de probabilité constante 0,3 lors d'une suite de lancers indépendants, donc Y suit une loi géométrique de paramètre 0,3. On en déduit, en appliquant la formule du cours du calcul de l'espérance d'une loi géométrique
$$E(Y) = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}.$$

Exercice 23.

On lance une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p. On répète cette expérience de façon indépendante et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient pile.

1. Écrire un algorithme qui simule cette variable aléatoire.
2. Modifier l'algorithme précédent de sorte qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de l'espérance de cette variable aléatoire.

Exercice 24.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer $P(Y > X)$.

Correction.

L'événement $Y > X$ est la réunion des événements disjoints $X = k, Y > k$, pour k allant de 1 à $+\infty$. Par indépendance des variables aléatoires X et Y, on a $P(X = k, Y > k) = P(X = k) \times P(Y > k)$. De plus, puisque X et Y suivent des lois géométriques, on sait que

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \text{ et } P(Y > k) = (1-q)^k.$$

On en déduit que

$$P(Y > X) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-q)\big((1-p)(1-q)\big)^{k-1} = \frac{p(1-q)}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p-pq}{p+q-pq}.$$

Exercice 25.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Correction.

Les valeurs propres de la matrice triangulaire A sont X_1 et X_2. Si $X_1 \neq X_2$, alors la matrice est diagonalisable. Si au contraire $X_1 = X_2$, alors l'espace propre associé à l'unique valeur propre X_1 a pour équation $y = 0$: il est de dimension 1 et A n'est pas diagonalisable. A est donc diagonalisable si et seulement si $X_1 \neq X_2$. Or,

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\big((X_1 = k) \cap (X_2 = k)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$$

car les variables aléatoires sont indépendantes. On a donc

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k-2} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

La probabilité recherchée est donc

$$1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

Exercice 26.

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truqe et la probabilité d'obtenir 6 est p, avec $0 < p < 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

1. Quelle est la loi de X ?
2. En déduire la probabilité de gagner de chacun des joueurs.

Correction.

1. La variable aléatoire X donne le rang du premier succès dans une suite d'expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre p. En particulier, en notant $q = 1-p$, on a, pour tout $k \geq 1$, $P(X = k) = pq^{k-1}$.
2. Soit A l'événement "le premier joueur gagne". Alors A est la réunion disjointe des événements $\{X = 3k+1\}$, pour $k \in \mathbb{N}$. On a donc

$$P(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = 3k+1) = \sum_{k\in\mathbb{N}} pq^{3k} = \frac{p}{1-q^3} = \frac{1}{1+q+q^2}.$$

De même, si on note B l'événement "le deuxième joueur gagne", C l'événement "le troisième joueur gagne", B est la réunion disjointe des événement $\{X = 3k+2\}$, pour $k \in \mathbb{N}$, et C est la réunion disjointe des événements $\{X = 3k+3\}$, $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$P(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = 3k+2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} pq^{3k+1} = \frac{pq}{1-q^3} = \frac{q}{1+q+q^2},$$

$$P(C) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = 3k+3) = \sum_{k\in\mathbb{N}} pq^{3k+2} = \frac{pq^2}{1-q^3} = \frac{q^2}{1+q+q^2},$$

On remarque que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$, ce qui signifie que presque sûrement, un des trois joueurs gagne (ou encore que presque sûrement, la partie ne dure pas indéfiniment).

Exercice 27.

Deux joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un 6. La partie s'arrête alors et le joueur qui a obtenu un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité qu'il tombe sur 6 vaut p, avec $0 < p < 1$. On cherche à calculer la probabilité de gagner de chacun des joueurs. On note G_1 l'évènement "le joueur 1 gagne" et G_2 l'évènement "le joueur 2 gagne".

1. Montrer que $P(G_2) = (1-p)P(G_1)$.
2. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$.

Correction.

1. Notons A l'événement : "le premier lancer donne un 6". Alors on a

$$P(G_2) = P_A(G_2)P(A) + P_{\bar{A}}(G_2)P(\bar{A}).$$

Bien sûr, on a $P_A(G_2) = 0$: si le premier lancer amène un 6, le deuxième joueur a perdu. D'autre part, on a $P_{\bar{A}}(G_2) = P(G_1)$. En effet, si le premier lancer n'amène pas un six, alors tout se passe comme si on commençait une nouvelle partie mais avec le deuxième joueur qui tire en premier. On en déduit que

$$P(G_2) = P(G_1)P(\bar{A}) = (1-p)P(G_1).$$

2. Le point clé est d'observer que $P(G_1)+P(G_2) = 1$. En effet, si on sait cela, alors en utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$(1-p)P(G_1) + P(G_1) = 1 \implies P(G_1) = \frac{1}{2-p}$$

d'où on déduit immédiatement que

$$P(G_2) = \frac{1-p}{2-p}.$$

Pour prouver que $P(G_1) + P(G_2) = 1$, on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier 6, $X = +\infty$ si on n'obtient jamais de 6. Alors X suit une loi géométrique de paramètre p, et donc $P(X < +\infty) = 1$. Mais on a aussi $G_1 \cup G_2 = (X < +\infty)$. D'où le résultat.