Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°23

1. Variables aléatoires discrètes

Exercice 1.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Correction.

1. Remarquons que
$$X = Y \iff \exists k \in \{1, \dots, n\},\ X = k \text{ et } Y = k.$$
On a donc
$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k \cap Y = k) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y = k)$$
puisque les variables aléatoires sont indépendantes. On en déduit
$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$
2. On peut suivre une méthode similaire en étudiant tous les cas pour lesquels $X \geq Y$. Il y a plus simple. Il suffit de remarquer que, par symétrie du rôle joué par X et Y, on a
$$P(X \geq Y) = P(Y \geq X).$$
Or,
$$\begin{aligned} P\big((X \geq Y) \cup (Y \geq X)\big) &= P(X \geq Y) + P(Y \geq X) - P\big((X \geq Y) \cap (Y \geq X)\big) \\ &= 2P(X \geq Y) - P(X = Y). \end{aligned}$$
En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve
$$1 = 2P(X \geq Y) - \frac{1}{n} \implies P(X \geq Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$
3. Remarquons que
$$X + Y = k \iff \exists i \in \{1, \dots, k-1\},\ X = i \text{ et } Y = k - i.$$
Il vient, pour tout $k = 2, \dots 2n$ (valeurs possibles prises par $X + Y$), que
$$P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P\big((X = i) \cap (Y = k - i)\big) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i)$$

par indépendance de X et Y. En réalité, on peut sommer sur un ensemble d'indices plus petit. En effet, $P(X=i) \neq 0$ implique que $1 \leq i \leq n$ et $P(Y=k-i) \neq 0$ implique que $1 \leq k-i \leq n$, soit $k-n \leq i \leq k-1$. On distingue alors deux cas :

(a) Si $k \leq n$, alors $k-n \leq 0$ et on effectue une somme de 1 à $k-1$ de termes tous égaux à $1/n^2$. On en déduit que dans ce cas
$$P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}.$$

(b) Si $k > n$, alors $n \leq k-1$ et on effectue une somme de $k-n$ à n de termes tous égaux à $1/n^2$. Dans ce cas,
$$P(X+Y=k) = \frac{2n+1-k}{n^2}.$$

Exercice 2.

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X+Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction.

1. Pour $i = 1, \dots, 6$, l'événement $X = i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
   (a) $A : U_1 = i$ et $U_2 = i$;
   (b) $B : U_1 = i$ et $U_2 > i$;
   (c) $C : U_1 > i$ et $U_2 = i$.

   Par indépendance des variables aléatoires U_1 et U_2, on en déduit que
   $$P(A) = \frac{1}{36},\ P(B) = \frac{6-i}{36} \text{ et } P(C) = \frac{6-i}{36}.$$
   Il vient $P(X=1) = 11/36$, $P(X=2) = 9/36$, $P(X=3) = 7/36$, $P(X=4) = 5/36$, $P(X=5) = 3/36$, $P(X=6) = 1/36$. On en déduit $E(X) = 91/36$.
2. On a $X+Y = U_1 + U_2$ car (U_1, U_2) est une permutation de (X,Y). Il vient $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = E(U_1)+E(U_2) = 7$, puisque chaque U_i suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$, son espérance vaut $(6+1)/2 = 7/2$. On en déduit $E(Y) = 161/36$.
3. On a $XY = U_1 U_2$. On en déduit
   $$E(XY) = E(U_1 U_2) = E(U_1)E(U_2)$$
   par indépendance de ces deux variables aléatoires. D'où
   $$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1225}{1296}.$$
   Les deux variables ne sont pas indépendantes puisque leur covariance n'est pas nulle.

Exercice 3.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$
2. Application : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100 ?

Correction.

1. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Y = \frac{X}{n}$. On a
$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}.$$
Mais ici, $E(Y) = \frac{1}{n}E(X) = p$ et $V(Y) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{p(1-p)}{n}$. Ceci donne donc immédiatement le résultat.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du chiffre 6 au cours des n lancers. X suit la loi $\mathcal{B}(n, 1/6)$. On cherche n tel que
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 0,95 \iff P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right) \leq 0,05.$$
On applique ensuite le résultat de la question précédente avec $\varepsilon = \frac{1}{100}$ et $p = \frac{1}{6}$. Il suffit que n vérifie
$$\frac{5 \times 10^4}{36n} \leq 0,05$$
soit
$$n \geq 27778.$$
Il suffit d'effectuer 27778 lancers. Cela dit, rien ne dit que ce nombre est optimal, et d'ailleurs, il ne l'est pas !

Exercice 4.

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

1. ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
2. ou bien deux marches, avec la probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de X_n ? Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ? Établir une formule de récurrence liant p_k et p_{k-1}. En déduire la valeur de p_k pour $k \geq 1$.
3. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième

marche. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Z_n.

Correction.

1. On a affaire ici à un schéma de Bernoulli : X_n compte le nombre de fois où n expériences indépendantes (les n premiers sauts) donnent un résultat ayant probabilité p. La variable aléatoire X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et p. Le nombre de marches franchies est alors
$$Y_n = X_n + 2(n - X_n) = 2n - X_n.$$
Par linéarité de l'espérance, on trouve
$$E(Y_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np = (2-p)n.$$
De plus, on a
$$V(Y_n) = V(X_n) = np(1-p).$$
2. On a $p_1 = p$: il faut que le premier saut de la grenouille soit un saut d'une marche. Pour déterminer p_2, on remarque que la grenouille passe par la marche 2 si le premier saut est un saut de deux marches ou si les deux premiers sauts sont des sauts de une marche. On a donc $p_2 = 1 - p + p^2$. On observe que la grenouille ne passe pas par la marche k si elle passe par la marche $k-1$ et si elle fait un saut de deux marches. On a donc :
$$1 - p_k = (1-p)p_{k-1} \iff p_k = 1 - (1-p)p_{k-1}.$$
On reconnait une suite arithmético-géométrique : la suite $u_k = p_k - \frac{1}{2-p}$ est une suite géométrique de raison $p-1$, et donc on a $u_k = (p-1)^{k-1}u_1$, ce qui signifie que $p_k = \frac{1}{2-p} + (1-p)^{k-1}u_1$. Puisque $u_1 = p - \frac{1}{2-p} = \frac{2p-p^2-1}{2-p}$, on a finalement :
$$p_k = \frac{1}{2-p} + (p-1)^{k-1}\frac{2p-p^2-1}{2-p}.$$
3. Voici un algorithme possible :

```
Variables :
    n entier
    hauteur entier
    saut entier
Traitement :
    Lire n
    hauteur=0
    saut=0
    Tant que (hauteur<n) faire
         Si (alea()<p) faire hauteur=hauteur+1
             Sinon faire hauteur=hauteur+2
         Fin si.
         saut=saut+1;
    Fin Tant que.
    Afficher saut
```

Exercice 5.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\frac{a}{2^{i+j}},$$

pour tous i,j de $\mathbb{N}^*$.

1. Calculer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction.

1. Il est d'abord nécessaire que $a\geq 0$. On a ensuite :

$$\sum_{i,j\geq 1}\frac{a}{2^{i+j}}=1\iff\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{a}{2^i}=1\iff a=1.$$

2. Pour $i\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X=i)=\sum_{j=1}^{+\infty}P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+j}}=\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2}\frac{1}{2^{i-1}}.$$

   X suit donc une loi géométrique de paramètre $1/2$. Par raison de symétrie, il en est de même pour Y.
3. On a :

$$P(X=i)\times P(Y=j)=\frac{1}{2^{i+j}}=P\big((X=i)\cap(Y=j)\big).$$

   Les variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 6.

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Correction.

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r,r+1,\dots,\}$. Soit $k\geq r$. Remarquons que si $X=k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X=k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}.$$

Exercice 7.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On répète un certain nombre de fois le protocole suivant : on tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est blanche, on arrête. Si elle est noire, on la remet dans l'urne, et on ajoute une boule blanche. On note Y la variable aléatoire correspondant au rang du tirage d'une boule blanche. On convient que $Y = 0$ si les tirages n'amènent jamais une boule blanche.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que l'on réalise au plus trois tirages.
   (a) Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. On suppose désormais, et jusqu'à la fin de l'exercice, qu'on répète les tirages jusqu'à obtention d'une boule blanche. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
3. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Y.
4. On note A_k l'événement "la k-ième boule tirée est noire". Exprimer l'événement "$Y = k$" en fonction des événements $A_1, \dots, A_k$.
5. Pour $j \geq 2$, calculer $P(A_j|A_1 \cap \dots \cap A_{j-1})$ et $P(\overline{A_j}|A_1 \cap \dots \cap A_{j-1})$.
6. En déduire, pour $k \geq 1$, la valeur de $P(Y = k)$.
7. Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!}$, puis démontrer que $\sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} = 1$.
8. Quelle est la probabilité pour que l'on ne tire jamais de boule blanche ?

Exercice 8.

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Correction.

1. Notons également r la probabilité que la partie soit nulle. On sait que $p + q + r = 1$ et que $r = P(X = 0) = e^{-a}$ d'où $p + q = 1 - e^{-a}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} p - q &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n + 1) - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n) \\ &= e^{-a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n + 1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{2n!} \right) \\ &= e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n!} \\ &= e^{-a}(1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$p = \frac{1}{2}(1 - e^{-2a}) \text{ et } q = \frac{1}{2}(1 - e^{-a})^2.$$

2. Notons G le gain de Pierre. Si $X = 2n$, alors $G = -X$, sinon $G = X$. G admet une espérance si la famille $(nP(G = n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire si la famille $(nP(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, ce qui est le cas car X suit une loi de Poisson donc admet une espérance. On a donc

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-2n)\frac{a^{2n}}{n!}e^{-a} + \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-a} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{(-a)^n}{n!}e^{-a} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-a)^n}{(n-1)!}e^{-a} \\ &= -(-a)e^{-a}e^{-a} \\ &= ae^{-2a}. \end{aligned}$$

Remarquons que Pierre est avantagé à ce jeu.

Exercice 9.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$
   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.
   (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que
   $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$
2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
   (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Correction.

1. (a) Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)P(X>k) - nP(X>n) + P(X>0)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n).
\end{aligned}$$

   (b) On a, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

   La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.

   (c) Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k).$$

   Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

2. (a) On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X>k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

   Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

   (b) Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

   (c) On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \to_{N\to+\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

   (d) On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \to 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 10.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction.

Notons $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} c_n t^n$ les fonctions génératrices respectives de X, Y et Z. On a donc

$$a_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \text{ et } b_n = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}.$$

La série génératrice de Z est obtenue en effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries. On a donc

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}. \end{aligned}$$

On reconnait bien la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire, Z suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 11.

1. Démontrer que toutes les racines (complexes) non-nulles du polynôme $P(X) = X^2 + X^3 + \cdots + X^{12}$ sont simples.
2. Peut-on truquer un dé de sorte que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

Correction.

1. Factorisons P par X^2. On trouve
$$P(X) = X^2 \times (1 + X + \cdots + X^{10}).$$
Les racines de $1 + X + \cdots + X^{10}$ sont les racines 11-ièmes de l'unité, excepté 1. Elles sont donc toutes simples.
2. Notons p_i la probabilité que le lancer de dé donne le numéro i, $i = 1, \dots 6$. Notons X_1 le résultat du premier lancer, et X_2 le résultat du second lancer. Les fonctions génératrices de

X_1 et X_2 sont égales et valent

$$f(x)=\sum_{i=1}^6 p_i x^i.$$

Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, la fonction génératrice de leur somme est

$$G_S(x)=\big(f(x)\big)^2.$$

Ainsi, G_S est un polynôme dont toutes les racines (sur $\mathbb{C}$) sont de multiplicité paire (donc au moins égale à 2). Or, si S suivait la loi uniforme sur $\{2,\dots,12\}$, sa fonction génératrice serait

$$G_U(x)=\frac{1}{11}(x^2+\dots+x^{12}).$$

Les racines de G_U, autres que 0, sont de multiplicité au plus égales à 1. On a donc une contradiction.

Exercice 12.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k sont tels que la suite (p_n) définie, pour $n\geq 0$, par $p_n=\left(\frac{a}{a+1}\right)^n k$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

Correction.

Il faut et il suffit que $p_n\in[0,1]$ pour tout entier n et que $\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=1$. La première condition est satisfaite, pour tout entier n, si et seulement si $a\geq 0$ et $k\geq 0$ (prendre $n=2$ donne $k\geq 0$, prendre $n=1$ donne ensuite $a\geq 0$). De plus,

$$\sum_{n\geq 0}p_n=\frac{k}{1-\frac{a}{a+1}}=k(a+1).$$

La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc $a\geq 0$ et $k=1/(a+1)$. La fonction génératrice est alors donnée par

$$G(t)=\sum_{n\geq 0}p_n t^n=\frac{k}{1-\frac{at}{a+1}}=\frac{1}{a+1-at}.$$

2. Systèmes différentiels

Exercice 13.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{1.}\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x+2y-z\\ y' &=& 2x+4y-2z\\ z' &=& -x-2y+z\end{array}\right. \qquad \textbf{2.}\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& y+z\\ y' &=& -x+2y+z\\ z' &=& x+z\end{array}\right.$$

Correction.

1. Introduisons la matrice
$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X'=AX$ avec $X(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $X^2(X-6)$. 0 est valeur propre double, mais A est de rang 1 et donc $\ker(A)$ est de dimension 2. Une base de $\ker(A)$ est donnée par les vecteurs $u_1=(1,0,1)$ et $u_2=(2,-1,0)$. D'autre part, une base de $\ker(A-6I)$ est donné par $u_3=(1,2,-1)$. Les solutions sont donc données par les triplets s'écrivant
$$X(t)=\lambda u_1+\mu u_2+\gamma e^{6t}u_3.$$
2. Introduisons cette fois la matrice
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix},$$
de sorte que le système s'écrit $X'=AX$ avec $X(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $X(X-1)(X-2)$, de sorte que ses valeurs propres sont $0,1,2$, de vecteurs propres respectifs associés $u_0=(1,1,-1)$, $u_1=(0,-1,1)$, et $u_2=(1,1,1)$. Ainsi, les solutions sont données par les triplets
$$X(t)=\lambda u_0+\mu e^t u_1+\gamma e^{2t}u_2.$$

Exercice 14.

Donner les solutions réelles du système différentiel $X'=AX$ lorsque
$$\mathbf{1}.A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{2}.A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&4&-2\\2&6&-3\end{pmatrix}.$$

Correction.

1. Les valeurs propres (complexes) de A sont 2, $1+i$ et $1-i$. Un vecteur propre associé à 2 est donné par $(1,1,1)$. Pour les deux autres valeurs propres, et pour trouver les solutions réelles, on va appliquer la méthode des coefficients indéterminés. On cherche donc une solution $X(t)$ s'écrivant
$$X(t)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e^t\cos t+\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}e^t\sin t$$
et on cherche les relations sur les coefficients $a,\dots,f$ pour que $X(t)$ soit solution du système.

La relation $X'(t) = AX(t)$ donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a+b)e^t\cos t + (d+e)e^t\sin t &=& (a+d)e^t\cos t + (-a+d)e^t\sin t \\ (-a+2b+c)e^t\cos t + (-d+2e+f)e^t\sin t &=& (b+e)e^t\cos t + (-b+e)e^t\sin t \\ (a+c)e^t\cos t + (d+f)e^t\sin t &=& (c+f)e^t\cos t + (-c+f)e^t\sin t \end{array}\right.$$

Par identification, on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} b &=& d \\ e &=& -a \\ b &=& -c \\ e &=& -f \\ a &=& f \\ d &=& -c \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont inutiles car elles se déduisent des précédentes. On peut alors choisir a et b comme paramètre, et on obtient un espace vectoriel de dimension deux de solutions, décrit par

$$\lambda e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\\ \sin t\end{pmatrix} + \mu e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ -\cos t\end{pmatrix}.$$

En conclusion, un triplet $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ est solution du système ssi il existe trois constantes α, λ et μ telles que

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(t) = \alpha e^{2t} + \lambda e^t\cos t + \mu e^t\sin t \\ x_2(t) = \alpha e^{2t} - \lambda e^t\sin t + \mu e^t\cos t \\ x_3(t) = \alpha e^{2t} + \lambda e^t\sin t - \mu e^t\cos t \end{array}\right.$$

2. Les valeurs propres de la matrice sont 1, i et $-i$. Un vecteur propre associé à 1 est $V_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$. Un vecteur propre associé à i est $V_i = \begin{pmatrix}i\\1\\2\end{pmatrix}$. Bien entendu, la matrice étant réelle, un vecteur propre associé à $-i$ est $\overline{V_i}$. Pour obtenir des solutions réelles, on peut considérer (toujours parce que la matrice A est réelle) $\Re e(V_i e^{it})$ et $\Im m(V_i e^{it})$. On trouve alors les solutions (indépendantes)

$$\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 2\cos t\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 2\sin t\end{pmatrix}.$$

La solution générale du système dans $\mathbb{R}$ est donc

$$\begin{pmatrix}\lambda e^t - \mu\sin t + \nu\cos t\\ -3\lambda e^t + \mu\cos t + \nu\sin t\\ -4\lambda e^t + 2\mu\cos t + 2\nu\sin t\end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\mathbf{1}.\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2}.\ A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A qui est $(X-2)^2(X-1)$. On cherche ensuite un vecteur propre pour la valeur propre 1. On trouve $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La fonction $t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une solution. Malheureusement, si on calcule $A - 2I$, on obtient que la matrice est de rang 2, et donc le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 1 : la matrice n'est pas diagonalisable ! On applique alors la méthode des coefficients indéterminés pour obtenir l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions associé à cette valeur propre. Autrement dit, on cherche les conditions sur a, b, c, d, e, f pour que la fonction

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix}$$

soit solution de $X'(t) = AX(t)$. Ceci est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2at + (a + 2b) \\ 2ct + (c + 2d) \\ 2et + (e + 2f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(c+e)t + 2(d+f) \\ (-a + 2c + 2e)t + (-b + 2d + 2f) \\ (-a + c + 3e)t + (-b + d + 3f) \end{pmatrix}$$

On identifie d'abord les termes de degré 1. On trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c + e \\ 2c & = & -a + 2c + 2e \\ 2e & = & -a + c + 3e \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a - c - e & = & 0 \\ a - 2e & = & 0 \\ a - c - e & = & 0 \end{array} \right.$$

La première et la troisième ligne sont identiques. On trouve donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2e \\ c & = & e \\ e & = & e \end{array} \right.$$

On identifie ensuite les termes constants. On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b & = & 2(d + f) \\ c + 2d & = & -b + 2d + 2f \\ e + 2f & = & -b + d + 3f \end{array} \right.$$

On remplace a et c par leur valeur en fonction de e (qui est un paramètre), puis on simplifie. Deux équations sont identiques et on trouve que le système précédent est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -b + 2c + 2f & = & e \\ -b + 2f & = & e \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 2d - e \\ d & = & d \\ f & = & d \end{array} \right.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation est

$$\lambda e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 2et + 2d - e \\ et + d \\ et + d \end{pmatrix},$$

λ, d et e étant des paramètres réels.

2. Le polynôme caractéristique de A est $X(X-1)^2$. On peut vérifier que $A(A-I) \neq 0$, et donc que le polynôme minimal de A est $X(X-1)^2$. La matrice A n'est pas diagonalisable. On recherche ensuite la valeur propre 0. Un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une solution. On étudie ensuite la valeur propre 2 en appliquant la méthode des coefficients indéterminés. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix} e^t$ et on étudie à quelle condition $X'(t) = AX(t)$, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} at + (a+b) & = & (-6a + 5c + 3e)t + (-6b + 5d + 3f) \\ ct + (c+d) & = & (-8a + 7c + 4e)t + (-8b + 7d + 4f) \\ et + (e+f) & = & (-2a + c + e)t + (-2b + d + f) \end{array} \right.$$

On peut alors résoudre ce système (en fait, exprimer tous les paramètres en fonction de 2). On peut aussi utiliser la méthode suivante. On cherche une solution sous la forme

$$X(t) = e^t(tV_2 + V_1).$$

On a $X'(t) = AX(t)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} AV_2 & = & V_2 \\ AV_1 & = & V_1 + V_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} V_2 & = & (A-I)V_1 \\ (A-I)^2 V_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

On cherche alors l'expression d'un élément V_1 de $\ker(A-I)^2$. Il est facile de vérifier que le noyau de $(A-I)^2$ est le plan d'équation $3X - 2Y - Z = 0$, dont une base est constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. V_1 s'écrit donc

$$V_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

avec λ, μ des réels. On en déduit

$$V_2 = (A-I)V_1 = (\lambda + 2\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les solutions s'écrivent donc

$$\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \lambda + 3\mu \end{pmatrix} + (\lambda + 2\mu) t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

Correction.

Introduisons
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il est facile de remarquer que
$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et $B^n = 0$ pour $n \geq 3$. De plus, $A = (aI_3 + bB + cB^2)$. Puisque I_3, B et B^2 commutent, on a
$$\exp(A) = \exp(a)\exp(bB)\exp(cB^2).$$
Or, utilisant que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$, on trouve
$$\begin{aligned} \exp(bB) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bB)^n}{n!} \\ &= I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}, \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \exp(cB^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cB^2)^n}{n!} \\ &= I_3 + cB^2. \end{aligned}$$
Il vient
$$\begin{aligned} \exp(A) &= e^a\left(I_3 + bB + \frac{b^2B^2}{2}\right)(I_3 + cB^2) \\ &= e^a\left(I_3 + bB + \left(\frac{b^2}{2} + c\right)B^2\right) \end{aligned}$$
soit
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a & \left(\frac{b^2}{2} + c\right)e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}.$$
La solution générale de $X' = AX$ est alors donnée par $X(t) = \exp(tA)X(0)$, soit, en posant $X(0) = (\alpha, \beta, \gamma)$
$$X(t) = \alpha e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{at}\begin{pmatrix} bt \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{at}\begin{pmatrix} ct + \frac{b^2t^2}{2} \\ bt \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 6x_1(t)+3x_2(t)-3t+4e^{3t} \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-x_2(t)+4t-4e^{3t} \end{array}\right.$ **2.** $\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t)+2x_2(t)+t \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t)-3x_2(t). \end{array}\right.$

On donnera les solutions réelles.

Correction.

1. Soit $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont 2 et 3, avec vecteurs propres respectifs $(-3,4)$ et $(4,-4)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire
$$P=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
Soit $Y(t)=\binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t)=PY(t)$. Le système se réécrit alors en
$$PY(t)=APY(t)+B(t)\iff Y(t)=P^{-1}APY(t)+P^{-1}B(t),$$
où $B(t)=\binom{-3t+4e^{3t}}{4t-4e^{3t}}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & 2y_1(t)+t \\ y_2'(t) & = & 3y_2(t)+e^{3t}. \end{array}\right.$$
Il est désormais facile de résoudre séparément chacune des équations différentielles séparément, en cherchant notamment une solution particulière sous la forme d'une exponentielle-polynôme. On trouve alors que
$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & \lambda e^{2t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{4} \\ y_2(t) & = & \mu e^{3t}+te^{3t} \end{array}\right.$$
Revenant à $X(t)$, on trouve que les solutions du système différentiel initial sont les fonctions
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & -3\lambda e^{2t}+4\mu e^{3t}+\frac{3t}{2}+\frac{3}{4}+4te^{3t} \\ x_2(t) & = & 4\lambda e^{2t}-4\mu e^{3t}-2t-1-4te^{3t}. \end{array}\right.$$

2. La méthode est similaire, mais cette fois la matrice n'est diagonalisable que sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On pose donc $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice du système. Ses valeurs propres sont $-1+2i$ et $-1-2i$, avec vecteurs propres respectifs $(1-i,2i)$ et $(1+i,-2i)$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, c'est-à-dire
$$P=\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & -2i \end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{i}{4}\begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}.$$
Soit $Y(t)=\binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ tel que $X(t)=PY(t)$. Le système se réécrit alors en
$$PY(t)=APY(t)+B(t)\iff Y(t)=P^{-1}APY(t)+P^{-1}B(t),$$

où $B(t)=\binom{t}{0}$. Ainsi, on obtient le système différentiel diagonal suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) &=& (-1+2i)y_1(t)+t/2\\ y_2'(t) &=& (-1-2i)y_2(t)+t/2. \end{array}\right.$$

Ses solutions (complexes) sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(t) &=& c_1e^{(-1+2i)t}+\frac{t}{10}+\frac{3}{50}+\frac{it}{5}-\frac{2i}{25}\\ y_2(t) &=& c_1e^{(-1-2i)t}+\frac{t}{10}+\frac{3}{50}-\frac{it}{5}+\frac{2i}{25} \end{array}\right.$$

avec $c_1,c_2\in\mathbb{C}$. Si on revient à x_1 et x_2, et en remplaçant $e^{(-1+2i)t}$ par $e^{-t}(\cos(2t)+i\sin(2t))$, on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) &=& \big((c_1+c_2)-i(c_1-c_2)\big)e^{-t}\cos(2t)+\big(i(c_1-c_2)+(c_1+c_2)\big)e^{-t}\sin(2t)+\frac{3t}{5}-\frac{1}{25}\\ x_2(t) &=& 2i(c_1-c_2)e^{-t}\cos(2t)-2(c_1+c_2)e^{-t}\sin(2t)-\frac{4t}{5}+\frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

On pose $\lambda=c_1+c_2$ et $\mu=i(c_1-c_2)$. Le couple (λ,μ) parcourt $\mathbb{C}^2$ lorsque (c_1,c_2) parcourt $\mathbb{C}^2$, et les solutions complexes du système sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) &=& (\lambda-\mu)e^{-t}\cos(2t)+(\lambda+\mu)e^{-t}\sin(2t)+\frac{3t}{5}-\frac{1}{25}\\ x_2(t) &=& 2\mu e^{-t}\cos(2t)-2\lambda e^{-t}\sin(2t)-\frac{4t}{5}+\frac{8}{25}. \end{array}\right.$$

Pour obtenir les solutions réelles, il suffit de prendre λ,μ dans $\mathbb{R}$.

3. Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 18.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''-2y'+y=x$, $y(0)=y'(0)=0$;
2. $y''+9y=x+1$, $y(0)=0$;
3. $y''-2y'+y=\sin^2 x$;

Correction.

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y''-2y'+y=0$. Son équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$, dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x\mapsto \lambda e^x+\mu xe^x.$$

Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y(x)=ax+b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ -2a+ax+b=x \iff a=1 \text{ et } b=2.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x\mapsto \lambda e^x+\mu xe^x+(x+2).$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations

$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$

soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$x \mapsto (x-2)e^x + (x+2).$$

2. L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $3i$ et $-3i$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$

La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto (A + Bx)e^x,\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on linéarise $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière qui correspond à $1/2$. La fonction constante égale à $1/2$ convient. On cherche ensuite une solution particulière convenant à $\cos(2x)$ (il suffira ensuite de multiplier par $-1/2$ pour trouver une solution convenant à $-\cos(2x)/2$). On cherche cette solution particulière sous la forme $y(x) = c\cos(2x) + d\sin(2x)$. On a alors

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (-3c - 4d)\cos(2x) + (4c - 3d)\sin(2x).$$

On cherche donc c et d solutions du système

$$\left\{\begin{cases} -3c - 4d & = 1 \\ 4c - 3d & = 0 \end{cases}\right.$$

On trouve $c = -3/25$ et $d = -4/25$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$x \mapsto (A + Bx)e^x + \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos(2x) + \frac{2}{25}\sin(2x),\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 19.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction.

On va chercher une équation différentielle linéaire du second ordre admettant exactement cette famille de solutions. Pour cela, il suffit de trouver une équation différentielle dont l'équation caractéristique admet 2 et -1 comme racine, c'est-à-dire que l'on souhaite qu'elle se factorise en $(r+1)(r-2) = r^2 - r - 2$. Une équation différentielle qui convient est donc

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Exercice 20.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y\text{"}{-}3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. Analyse. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) En déduire le "portrait robot" de y.
3. Synthèse. Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Correction.

1. Oui, il s'agit bien d'une équation linéaire, mais elle n'est pas à coefficients constants.
2. (a) On doit dériver une fonction composée. On trouve

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(t).$$

   (b) En posant, comme indiqué dans l'énoncé, $x = e^t$, (E) se réécrit :

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0.$$

   On exprime ensuite $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$ en fonction de $z'(t)$ et de $z''(t)$. On trouve :

$$y'(e^t) = e^{-t}z'(t) \text{ et } y''(e^t) = e^{-2t}z''(t) - e^{-t}y'(e^t) = e^{-2t}\big(z''(t) - z'(t)\big).$$

   En introduisant cela dans (E), on obtient

$$z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) = 0 \iff z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 0.$$

   (c) Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, dont la seule solution est $\lambda = 2$. Ainsi, il existe deux constantes a et b telles que $z(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$.
   (d) On revient à y par $y(x) = z(\ln x)$ et $t = \ln x$. On trouve que si y est solution de l'équation, alors on a

$$y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x).$$

3. On a montré que si y est solution de (E), alors il existe deux réels a,b tels que, pour tout $x>0$, on a $y(x)=ax^2+bx^2\ln(x)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $x\mapsto ax^2+bx\ln x$ est solution de l'équation. On a donc trouvé toutes les solutions de l'équation.

Exercice 21.

Rechercher les fonctions polynômes solutions de

$$(x^2-3)y''-4xy'+6y=0.$$

En déduire toutes les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Soit P une fonction polynôme non-nulle solution de l'équation, de coefficient dominant a_nx^n. Alors $(x^2-3)P''-4xP+6P$ est une fonction polynôme de degré au plus n, dont le coefficient devant x^n est

$$n(n-1)a_n-4na_n+6a_n=a_n(n^2-5n+6).$$

Ce coefficient doit être nul. Or, $a_n\neq 0$. C'est donc que $n^2-5n+6=0$, ou encore que $n=2$ ou $n=3$. On cherche donc les polynômes solution sous la forme $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. P est solution de l'équation si et seulement si les coefficients vérifient le système

$$\begin{cases} -18a_3+2a_1 &=0\\ \;\;-6a_2+6a_0 &=0\end{cases}$$

Les polynômes solution sont donc ceux qui s'écrivent

$$\lambda(x^3+9x)+\mu(x^2+1).$$

Comme les deux fonctions $x\mapsto x^3+9x$ et $x\mapsto x^2+1$ sont linéairement indépendantes, on a donc résolu l'équation sur tout intervalle où x^2-3 ne s'annule pas. Raccordons maintenant les solutions. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe six constantes $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ et μ_1,μ_2,μ_3 telles que, si f est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, alors on a

$$f(x)=\begin{cases}\lambda_1(x^3+9x)+\mu_1(x^2+1) & \text{si } x<-\sqrt3\\ \lambda_2(x^3+9x)+\mu_2(x^2+1) & \text{si } -\sqrt3<x<\sqrt3\\ \lambda_3(x^3+9x)+\mu_3(x^2+1) & \text{si } x>\sqrt3.\end{cases}$$

Puisque f est C^2 en $\sqrt3$, on doit avoir,

$$\lim_{x\to\sqrt3-}f(x)=12\sqrt3\lambda_2+4\mu_2=12\sqrt3\lambda_3+4\mu_3=\lim_{x\to\sqrt3^+}f(x)$$

et

$$\lim_{x\to\sqrt3-}f'(x)=18\lambda_2+2\sqrt3\mu_2=18\lambda_3+2\sqrt3\mu_3=\lim_{x\to\sqrt3^+}f'(x).$$

Cette dernière équation n'apporte pas d'informations supplémentaires, car elle est obtenue en multipliant la première par $\sqrt3/2$. Si on calcule une dérivée supplémentaire, on trouve

$$\lim_{x\to\sqrt3-}f''(x)=6\sqrt3\lambda_2+2\mu_2=6\sqrt3\lambda_3+2\mu_3=\lim_{x\to\sqrt3^+}f''(x)$$

qui redonne toujours la même équation. La fonction f est donc C^2 en $\sqrt{3}$ si et seulement si

$$\mu_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda_2 + \mu_2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda_3.$$

En examinant le problème en $-\sqrt{3}$, on tire cette fois comme contrainte

$$\mu_1 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}\lambda_2 + \mu_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda_1.$$

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions f définies comme ci-dessus, où $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2$ et λ_3 sont n'importe quel réel, et μ_1, μ_3 sont données par les équations précédentes. En particulier, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4.

Exercice 22.

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$(t^2+t)x'' + (t-1)x' - x = 0.$$

1. Déterminer les solutions polynômiales de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$.
3. Reprendre le même exercice avec

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$$

dont on déterminera les solutions sur $]0,+\infty[$. On cherchera d'abord les solutions polynômiales de l'équation homogène !

Correction.

1. Soit P un polynôme solution de (E), et a_nt^n son coefficient dominant. Alors le coefficient dominant de $(t^2+t)P'' + (t-1)P' - P$ est $(n(n-1)+n-1)a_nt^n$. Puisque P est solution de (E), il faut donc que $n(n-1)+n-1=0$, ce qui entraine $n=1$. On cherche donc une solution de la forme $P(t)=at+b$. On procède par identification et on trouve facilement que les seules solutions polynômiales sont les polynômes de la forme $P(t)=\lambda(t-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
2. On se ramène à une équation d'ordre 1, en posant $y(t)=\frac{x(t)}{t-1}$ (c'est possible puisqu'on travaille sur $]1,+\infty[$). On obtient donc $x'=(t-1)y'+y$ et $x''=(t-1)y''+2y'$, et donc x est solution de (E) si et seulement si y vérifie
$$(t^2+t)(t-1)y'' + \big(2(t^2+t)+(t-1)^2\big)y' = 0.$$
On écrit alors $\frac{y''}{y'}$ sous forme d'une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples, et on trouve :
$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{-2}{t-1} - \frac{2}{t+1} + \frac{1}{t}.$$
On intègre, et on trouve qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que
$$\ln\big(y'(t)\big) = \ln\left(\frac{t}{(t-1)^2(t+1)^2}\right) + C.$$

Passant à l'exponentielle, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$z'(t) = \frac{\lambda t}{(t^2-1)^2}$$

puis intégrant, il existe $\alpha > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$z(t) = \frac{\alpha}{(1-t^2)} + \mu$$

ce qui donne pour solutions de l'équation initiale

$$x(t) = -\frac{\alpha}{t+1} + \mu(t-1).$$

3. La méthode est exactement identique. Cette fois, on trouve qu'un polynôme solution de l'équation homogène est forcément de degré 2, et $x \mapsto x^2$ est solution. On applique la méthode du wronskien de l'ordre en posant $y = x^2 u$. u est solution de

$$xu'' + u' = 1$$

d'où on trouve u et finalement y :

$$y(x) = \lambda x^2 \ln x + \mu x^2 + x^3,$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 23.

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \qquad (E)$$

dont on se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

1. Question préliminaire : soient a, b, c, d 4 réels et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x^2) + b\sin(x^2) & \text{si } x > 0 \\ c\cos(x^2) + d\sin(x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   A quelle condition sur a, b, c, d la fonction f se prolonge-t-elle en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$? On recherche les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0. On note $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle solution, lorsqu'elle existe, et on désigne par R son rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une relation de récurrence, que l'on explicitera, entre a_{n+4} et a_n.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p+1} et a_{4p+3}.
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer a_{4p} en fonction de a_0 et de p (respectivement a_{4p+2} en fonction de a_2 et p).
5. Quel est le rayon de la série entière obtenue ? Exprimer la comme combinaison linéaire de deux fonctions "classiques".
6. Soit S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Préciser une base de S.

Correction.

1. Il faut étudier quelles conditions il faut mettre sur a, b, c et d pour que ceci définisse une solution de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. La continuité de y en 0 entraîne que $a = c$ puisque
$$a = \lim_{x\to 0^+} y(x) \text{ et } c = \lim_{x\to 0^-} y(x).$$
De plus, on a
$$y'(x) = -2ax\sin(x^2) + 2bx\cos(x^2) \text{ si } x > 0.$$
$$y''(x) = -2a\sin(x^2) - 4ax^2\cos(x^2) + 2b\cos(x^2) - 4bx^2\sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$
De même, on a
$$y''(x) = -2a\sin(x^2) - 4ax^2\cos(x^2) + 2d\cos(x^2) - 4dx^2\sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$
Remarquons que
$$b = \lim_{x\to 0^+} y''(x) \text{ et } d = \lim_{x\to 0^-} y''(x).$$
Pour que y'' soit continue en 0, il est nécessaire que $b = d$. Réciproquement la fonction $x \mapsto a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$ définit bien une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière solution de (E) de rayon de convergence $R > 0$. On introduit ce développement en série entière dans (E). Après dérivation terme à terme de la série, et réindexation des séries, on obtient :
$$xy'' - y' + 4x^3 y = -a_1 + 3a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \big(a_{n+1}(n-1)(n+1) + 4a_{n-3}\big)x^n = 0$$
pour tout $x \in]-R, R[$. L'unicité du développement en série entière entraîne que $a_1 = a_3 = 0$, tandis que, pour tout $n \geq 3$,
$$a_{n+1} = -\frac{4}{(n-1)(n+1)} a_{n-3}.$$
En réindexant, on trouve, pour tout $n \geq 0$,
$$a_{n+4} = -\frac{4}{(n+2)(n+4)} a_n.$$
3. D'après la relation de récurrence précédente, et puisque a_1 et a_3 sont nuls, on trouve que $a_{4p+1} = 0$ et $a_{4p+3} = 0$ pour tout $p \geq 0$.
4. La relation de récurrence nous dit que
$$a_{4p} = -\frac{4}{(4p)(4p-2)} a_{4(p-1)} = \frac{-1}{2p(2p-1)}.$$
On prouve alors aisément par récurrence que
$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0.$$
De même, on obtient
$$a_{4p+2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_2.$$

5. En appliquant la règle de d'Alembert, ou en remarquant que $\frac{R^p}{(2p)!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, pour tout $R \in \mathbb{R}$, on obtient que la série entière obtenue a pour rayon de convergence $+\infty$. De plus, on a

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{4p} + a_1 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{4p+2} \\ &= a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2). \end{aligned}$$

6. Puisque la série entière obtenue a pour rayon de convergence $+\infty$, sa somme est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, sur chaque intervalle ne contenant pas 0, on sait que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2. Il est donc nécessairement engendré par $\cos(x^2)$ et $\sin(x^2)$. Considérons maintenant une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$. Elle est solution sur $]0, +\infty[$, et donc il existe deux constantes a_0 et a_2 telles que

$$y(x) = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2) \text{ pour } x > 0.$$

Elle est solution sur $]-\infty, 0[$ et donc il existe deux constantes b_0 et b_2 telles que

$$y(x) = b_0 \cos(x^2) + b_2 \sin(x^2) \text{ pour } x < 0.$$

D'après la question préliminaire, y va se prolonger en une fonction de classe C^2 si et seulement si $a_0 = b_0$ et $a_2 = b_2$. Ainsi, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions $x \mapsto a\cos(x^2) + b\sin(x^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.

Pour les équations différentielles suivantes :

1. Chercher les solutions développables en séries entières
2. Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi par la méthode du wronskien
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

1. $xy'' + 2y' - xy = 0$ **2**. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Correction.

1. On cherche une solution développable en série entière, qui s'écrit donc $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. On introduit ceci dans l'équation

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0.$$

On réindexe la troisième somme pour retrouver une somme faisant apparaitre un terme en x^{n-1}. On trouve

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-1} = 0.$$

On en déduit $a_1 = 0$, puis, pour $n \geq 2$,

$$n(n+1)a_n = a_{n-2}.$$

On en déduit que, pour tout entier p, $a_{2p+1} = 0$ alors

$$a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p+1)2p} = \dots = \frac{a_0}{(2p+1)!}.$$

Comme la série entière $\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, on trouve que la fonction

$$f(x) = \sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!} = \frac{\sinh(x)}{x}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. On résoud alors l'équation sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$ (où on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2) par la méthode du wronskien. Pour cela, on pose $y(x) = f(x)z(x)$. Sachant que f est solution de l'équation, on trouve que y est aussi solution si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$2xf'z' + xfz'' + 2fz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en z', que l'on sait résoudre. Remplaçant f par sa valeur, on trouve

$$2\cosh xz' + \sinh xz'' = 0 \implies \frac{z''}{z'} = -2\frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Il vient

$$z' = \frac{\lambda}{\sinh^2 x}$$

puis

$$z = \frac{\lambda \cosh x}{\sinh x} + \mu.$$

Finalement, toute solution sur $]0,+\infty[$ s'écrit sous la forme

$$y(x) = \mu\frac{\sinh x}{x} + \lambda \cosh x x.$$

Si on cherche maintenant les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut procéder par recollement. Si y est solution sur $\mathbb{R}$, il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \mu_1\frac{\sinh x}{x} + \lambda_1\frac{\cosh x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \mu_2\frac{\sinh x}{x} + \lambda_2\frac{\cosh x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En étudiant la limite de $\cosh x/x$ en zéro, et sachant que y doit être continu en 0, on voit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. D'autre part, puisque $\sinh x/x \to 1$ en 0, la continuité de y en 0 impose alors que $\mu_1 = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = \mu_2$. Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \mu\frac{\sinh x}{x}$.

2. On recopie la même méthode, en posant $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Si on introduit dans l'équation, on trouve

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n\geq 1} na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

On change les indices dans la deuxième somme pour trouver :

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 1} n(n+1)a_{n+1}x^n + 3\sum_{n\geq 1} na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

Par identification, on trouve $a_0 = 0$, $a_2 = 2a_1$, puis, pour $n \geq 2$:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n.$$

Ainsi, par récurrence, on trouve $a_n = na_1$. Puisque la série entière $\sum_{n\geq 1} nx^n$ a pour rayon de convergence 1, on a prouvé que la fonction

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

est solution de l'équation sur $]-1,1[$ (en réalité, sur $]-\infty,1[$). On va ensuite résoudre l'équation sur $]0,1[$, par la méthode du wronskien. Pour cela, on pose $y(x) = f(x)z(x)$. Sachant que f est solution de l'équation, on trouve que y est aussi solution si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$2x(x-1)f'z' + x(x-1)fz'' + 3xfz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en z', que l'on sait résoudre. Remplaçant f par sa valeur, simplifiant par x, et après regroupement, on trouve

$$z'(x-2) = x(1-x)z''.$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x-2}{x(1-x)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

Ceci s'intègre en

$$z' = \lambda\frac{1-x}{x^2} = \lambda\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

On intègre encore une fois pour trouver z. Quitte à changer λ en $-\lambda$, il vient :

$$z = \lambda\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + \mu.$$

Les solutions de l'équation sur $]0,1[$ sont donc les fonctions

$$y(x) = \frac{\mu x + \lambda(1 + x\ln x)}{(1-x)^2}.$$

Si on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut au moins que la fonction ait une limite en 1. Faisons le développement limité du numérateur, en posant $x = 1-h$. Il vient

$$\begin{aligned}
N(x) &= \mu(1-h) + \lambda\big(1 + (1-h)\ln(1-h)\big)\\
&= \mu - \mu h + \lambda\big(1 + (1-h)(-h - h^2/2 + o(h^2))\big)\\
&= \mu - \mu h + \lambda\big(1 - h + h^2/2 + o(h^2)\big)\\
&= (\mu+\lambda) - (\mu+\lambda)h + \lambda h^2/2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Puisque le dénominateur est h^2, la fonction admet une limite en 1 si et seulement si $\lambda = -\mu$. D'autre part, il faut que la fonction soit dérivable en 0. Mais, du fait de la présence du terme $x\ln x$, dont le taux d'accroissement en 0 tend vers $-\infty$, la fonction ne peut être dérivable que si $\lambda = 0$. Ainsi, la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle !