Feuille d'exercices n°24

Exercice 1. *CCP 2017*

On définit deux fonctions :
- la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x,y).
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Exercice 2. *Banque CCP exo 33*

On pose : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 3.

Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \ln(2x+y-2) \qquad f_2(x,y) = \sqrt{1-xy}$$
$$f_3(x,y) = \frac{\ln(y-x)}{x} \qquad f_4(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Exercice 4.

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :
$$2|xy| \le x^2 + y^2$$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :
$$|f(x,y)| \le 4\|(x,y)\|_2,$$
où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 5.

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Exercice 6.

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y) = e^x \cos y$.
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice 7.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$.
2. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
3. $f(x,y) = (y\sin x, \cos x)$.

Exercice 8.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{2}(x^2-z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $f(x,y) = \left(xy, \dfrac{1}{2}x^2 + y, \ln(1+x^2)\right)$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x^2-y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que f et g sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice jacobienne de f et celle de g en (x,y).
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f\circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \mapsto & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0. \end{array}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11.

1. Démontrer que, pour tous (x,y) réels, alors $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.
2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = (x^p y^q)/(x^2 - xy + y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, où p et q sont des entiers naturels non nuls. Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est-elle continue ?
3. Montrer que si $p + q = 2$, alors f n'est pas différentiable.
4. On suppose que $p+q = 3$, et que f est différentiable en $(0,0)$. Justifier qu'alors il existe deux constantes a et b telles que $f(x,y) = ax + by + o(\|(x,y)\|)$. En étudiant les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$, justifier que $a = b = 0$. Conclure, à l'aide de $x \mapsto f(x,x)$, que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 12.

On pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. Déterminer les points critiques de f, de g.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Exercice 13.

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

Exercice 14.

Soit f une fonction convexe différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.