# Corrigé de la feuille d'exercices n°24

**Exercice 1.** *CCP 2017*

On définit deux fonctions :
- la fonction $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction $g$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que les fonctions $f$ et $g$ sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de $f$ puis de $g$ en $(x,y)$.
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$ ;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Correction.

1. Les fonctions $f$ et $g$ sont de classe $C^\infty$ par théorèmes d'opérations. Elle sont donc différentiables en tout point et les jacobiennes sont
$$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) \end{pmatrix}$$
$$J(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
2. (a) On a facilement
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f \circ g(x,y) = \sin((x+y)^2 - (x-y)^2) = \sin(4xy)$$
On en déduit que
$$d(f \circ g)(x,y)\ :\ (u,v) \mapsto \frac{\partial f \circ g}{\partial x} u + \frac{\partial f \circ g}{\partial y} v = 4(yu + xv)\cos(4xy)$$
   (b) On peut aussi dire que
$$\begin{aligned} J(f \circ g)(x,y) &= J(f)(g(x,y)) \times J(g)(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & 2(x-y)\cos(4xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x\cos(4xy) & 4y\cos(4xy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
On obtient l'image de $(u,v)$ en multipliant la jacobienne par la matrice colonne associé à $(u,v)$. On obtient bien sûr le même résultat.

**Exercice 2.** *Banque CCP exo 33*

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que $f$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

Correction.

1. Par opérations sur les fonctions continues, $f$ est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
   On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant ||(x,y)||_2$ et $|y| \leqslant ||(x,y)||_2$.
   On en déduit que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
   $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{|x||y|}{||(x,y)||_2} \leqslant \dfrac{(||(x,y)||_2)^2}{||(x,y)||_2} = ||(x,y)||_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit que $f$ est continue en $(0,0)$.

   Ainsi $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, $f$ admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   En $(0,0)$ :
   $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = 0$ , donc $f$ admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   De même, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right) = 0$ . Donc $f$ admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa seconde variable et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
3. D'après le cours, $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

   Or, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
   On remarque que $\forall x > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

   Donc $f$ n'est pas de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 3.**

Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \ln(2x+y-2) \qquad f_2(x,y) = \sqrt{1-xy}$$
$$f_3(x,y) = \frac{\ln(y-x)}{x} \qquad f_4(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Correction.

1. Le logarithme est défini si $2x + y - 2 > 0$. On trouve donc le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation $2x + y - 2 = 0$.
2. $1 - xy \geq 0$ si et seulement si $y \leq 1/x$, dans le cas où $x > 0$, $y \geq \frac{1}{x}$ si $x < 0$. Le domaine de définition est la réunion de la partie située sous l'hyperbole $y = 1/x$ pour $x > 0$, de la partie située au-dessus de l'hyperbole pour $x < 0$, et de l'axe des ordonnées.
3. Les conditions sont $x \neq 0$ et $y - x > 0$. On trouve donc un demi-plan, auquel on a retiré une (portion de) droite.
4. Les conditions sont cette fois $x^2 + y^2 - 1 > 0$ et $x^2 - y^2 \leq 4$. On trouve donc la couronne située entre les cercles de centre $O$ et de rayon respectifs 1 et 2, le premier cercle n'étant pas dans le domaine, le second si.

**Exercice 4.**

1. Montrer que si $x$ et $y$ sont des réels, on a :
$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$
2. Soit $f$ l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
Montrer que, pour tout $(x,y)$ de $A$, on a :
$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|_2,$$
où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. En déduire que $f$ admet une limite en $(0,0)$.

Correction.

1. On a :
$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|.$$
2. L'inégalité de la question précédente se réécrit encore encore en
$$|xy| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}.$$
On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire
$$|f(x,y)| \leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2 + \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2} \leq 4\|(x,y)\|_2.$$
Ainsi, si $(x,y)$ tend vers 0, on a $|f(x,y)|$ qui tend vers 0.

**Exercice 5.**

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$ ?

1. $f(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Correction.

1. On a
$$|f(x,y)|\leq |x|+|y|\leq \|(x,y)\|_1.$$
La limite de $f$ en $(0,0)$ est donc 0.
2. Non ! On a
$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x,2x)=-\frac{3}{5}.$$
3. Non !
$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=+\infty.$$

**Exercice 6.**

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y)=e^x\cos y$.
2. $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y^2}$.

Correction.

Pour tout réel $y$ fixé, la fonction $x\mapsto e^x\cos y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle par rapport à la première variable dans le premier exemple. La justification est identique pour les autres fonctions et on trouve respectivement :

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^x\cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-e^x\sin y.$$
2. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\cos(xy)-y(x^2+y^2)\sin(xy),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\cos(xy)-x(x^2+y^2)\sin(xy).$$
3. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

**Exercice 7.**

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x,y) = e^{xy}(x+y)$.
2. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
3. $f(x,y) = (y\sin x, \cos x)$.

Correction.

1. $f$ admet des dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y(x+y)+1)\,e^{xy}$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x(x+y)+1)\,e^{xy}.$$
Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $f$ est différentiable, et on a :
$$df_{(x,y)}(h,k) = \big(h(y(x+y)+1) + k(x(x+y)+1)\big)e^{xy}.$$
Avec la notation différentielle, on a (ce qu'on peut obtenir aussi en différentiant directement $f$), on a aussi
$$df = \big(y(x+y)+1\big)e^{xy}dx + \big(x(x+y)+1\big)e^{xy}dy.$$
2. $f$ est clairement $C^\infty$, et est donc différentiable. On a donc
$$df = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$$
3. $f$ est clairement $C^\infty$, et est donc différentiable. La différentielle de $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y\cos x, -\sin x)$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\sin x, 0).$$
On en déduit que
$$df_{(x,y)}(h,k) = h\begin{pmatrix} y\cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8.**

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $f(x,y) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1+x^2)\right)$.

Correction.

Il suffit de vérifier que les fonctions coordonnées sont différentiables, et elles sont clairement $C^\infty$. On a respectivement

1.
$$J_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}.$$

2.
$$J_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que $f$ et $g$ sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice jacobienne de $f$ et celle de $g$ en $(x,y)$.
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$ ;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Correction.

1. $f$ et $g$ sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. De plus, en calculant les dérivées partielles, on montre facilement que
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. (a) On a $f \circ g(x,y) = \sin(4xy)$. On en déduit la matrice jacobienne de $f \circ g$ en $(x,y)$.
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 4y\cos(4xy) & 4x\cos(4xy) \end{pmatrix}.$$
Il vient
$$d(f \circ g)((x,y))(u,v) = \mathrm{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4uy\cos(4xy) + 4vx\cos(4xy).$$
(b) D'après la formule de composition des différentielles, on sait que
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = \mathrm{Jac}_{g(x,y)}(f) \times \mathrm{Jac}_{(x,y)}(g).$$
Mais,
$$\mathrm{Jac}_{g(x,y)}f = \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & -2(x-y)\cos(4xy) \end{pmatrix}.$$
Le produit des deux matrices redonne alors le résultat précédent.

**Exercice 10.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \mapsto & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0. \end{array}$$

1. $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ?
2. $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?
3. $f$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$ ?

Correction.

1. D'une part, $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant par exemple l'inégalité classique $2|xy| \leq x^2 + y^2$, on obtient :
$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{x^2+y^2}{2},$$
ce qui prouve la continuité de $f$ en $(0,0)$.
2. Remarquons d'abord que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$, comme quotient de deux fonctions de classe $C^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, si $(x,y) \neq (0,0)$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
D'autre part, on a $f(x,0) - f(0,0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On a alors :
$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| & \leq & \frac{|x|^4|y| + |y|^5 + 4|x|^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} \\ & \leq & \frac{6(x^2+y^2)^{5/2}}{(x^2+y^2)^2} \\ & \leq & 6(x^2+y^2)^{1/2}, \end{array}$$
où on a utilisé que $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$ et $|y| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$. Ceci prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par symétrie des rôles joués par $x$ et $y$ dans l'expression de $f(x,y)$, le même résultat est vrai pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On a donc prouvé que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Toute fonction de classe $C^1$ étant différentiable, $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 11.**

1. Démontrer que, pour tous $(x,y)$ réels, alors $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.
2. Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = (x^py^q)/(x^2 - xy + y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, où $p$ et $q$ sont des entiers naturels non nuls. Pour quelles valeurs de $p$ et $q$ cette fonction est-elle continue ?
3. Montrer que si $p + q = 2$, alors $f$ n'est pas différentiable.
4. On suppose que $p+q = 3$, et que $f$ est différentiable en $(0,0)$. Justifier qu'alors il existe deux

constantes $a$ et $b$ telles que $f(x,y)=ax+by+o(\|(x,y)\|)$. En étudiant les applications partielles $x\mapsto f(x,0)$ et $y\mapsto f(0,y)$, justifier que $a=b=0$. Conclure, à l'aide de $x\mapsto f(x,x)$, que $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Correction.

1. On a $(|x|-|y|)^2=|x|^2-2|xy|+y^2\geq 0$, ce qui donne l'inégalité demandé !
2. Seule la continuité en $(0,0)$ pose problème. On a donc $|f(x,y)|\leq |xy||x^{p-1}y^{q-1}|/(x^2-xy+y^2)\leq x^{p-1}y^{q-1}$. Cette dernière quantité tend vers 0, sauf si $p-1=q-1=0$, c'est-à-dire sauf si $p+q=2$. Dans ce cas, on a $f(x,x)=1$, qui ne tend pas vers 0 si $x$ tend vers 0. $f$ n'est alors pas continue en $(0,0)$.
3. Si $p+q=2$, la fonction n'est pas continue : a fortiori, elle ne peut pas être différentiable.
4. Si $p+q=3$, et que $f$ est différentiable en $(0,0)$, alors $f(x,y)=f(0,0)+df_{(0,0)}(x,y)+o(\|(x,y)\|)$. Mais la différentielle est ici une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On note $(a\ b)$ sa matrice. On obtient alors le résultat demandé. Ensuite, puisque $f(x,0)=0=ax+o(|x|)$, on obtient, par unicité du développement limite, que $a=0$. De même en étudiant l'application $y\mapsto f(0,y)$, on trouve $b=0$. Ainsi, $f(x,x)=o(|x|)$. Mais $f(x,x)=x$ (cf le calcul fait avant), qui n'est pas un $o(|x|)$.

**Exercice 12.**

On pose $f(x,y)=x^2+y^2+xy+1$ et $g(x,y)=x^2+y^2+4xy-2$.

1. Déterminer les points critiques de $f$, de $g$.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de $f$.
3. En étudiant les valeurs de $g$ sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de $g$.

Correction.

1. On calcule les dérivées partielles de $f$ :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2y.$$
Si $(x,y)$ est un point critique de $f$, il vérifie donc le système
$$\left\{\begin{array}{rcl}2x+y&=&0\\x+2y&=&0\end{array}\right.$$
$(0,0)$ est donc le seul point critique de $f$. Un raisonnement tout à fait similaire montre que $(0,0)$ est aussi le seul point critique de $g$.
2. Les extrema locaux d'une fonction différentiable ne pouvant être atteints qu'en un point critique, il suffit d'étudier si $(0,0)$ est un extrémum local.
$$f(x,y)=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1\geq 1=f(0,0).$$
Ainsi, $(0,0)$ est un extrémum local, et même global, de $f$.

3. Ici aussi, il suffit de déterminer la nature de $(0,0)$. On a $g(0,0) = -2$. On a également, pour $x \neq 0$, $g(x,0) = 5x^2 - 2 > g(0,0)$ et $g(x,-x) = -2x^2 - 2 < g(0,0)$. Ainsi, aussi près de $(0,0)$ qu'on veut, $g$ prend des valeurs (strictement) supérieures et (strictement) inférieures à $g(0,0)$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de $g$. Comme $(0,0)$ est le seul point critique de $g$, $g$ n'admet pas d'extrémum local.

**Exercice 13.**

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

Correction.

1. On calcule les dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6.$$
L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donnent les points critiques. On trouve après résolution du système que seul $(0,3)$ est un point critique de $f$. Posons $u = x$ et $v = y - 3$ pour se ramener en $(0,0)$. Alors
$$f(x,y) = u^2 + uv + v^2 - 9 = (u + v/2)^2 + 3v^2/4 - 9 \geq f(0,3).$$
Ainsi, $(0,3)$ est un minimum local, et même global, de $f$.
2. On trouve cette fois $(1,1)$ comme unique point critique de $f$. En posant $u = x - 1$ et $v = y - 1$ (toujours dans l'idée de se ramener en $(0,0)$), on a
$$f(x,y) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u-v)^2 + v^2 \geq f(1,1).$$
Ainsi, $(1,1)$ est un minimum local, et même global, de $f$.
3. Le seul point critique est $(0,0)$. On a $f(x,0) > 0 = f(0,0)$ si $x > 0$ et $f(x,0) < 0 = f(0,0)$ si $x < 0$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de $f$.
4. Posons $u = x - y$, $v = x + y$ et $g(u,v) = u^2 + v^3$. Étudier les extrema locaux de $g$ revient, modulo le changement de variables, à étudier les extrema locaux de $f$. $(0,0)$ est le seul point critique de $g$, et puisque $g(0,y) > 0$ si $y > 0$ et $g(0,y) < 0$ si $y < 0$, $(0,0)$ n'est pas un extrémum de $g$. Donc $f$ n'admet pas d'extrémum local.

**Exercice 14.**

Soit $f$ une fonction convexe différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout point critique de $f$ est un minimum global.

Correction.

On va procéder par contraposée, ie on va prendre un point $x$ de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas un minimum global, et on va prouver que $df_x \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y) < f(x)$. Alors, pour $t \in ]0,1[$, $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$. On écrit le développement limité de $f$ en $x$ :

$$\begin{aligned} f\big(tx+(1-t)y\big) &= f(x)+df_x\big(tx+(1-t)y-x\big)+o((1-t)) \\ &= f(x)+df_x\big((1-t)(y-x)\big)+o(1-t) \end{aligned}$$

De l'inégalité de convexité, on déduit

$$(1-t)df_x(y-x)+o(1-t) \leq (1-t)\big(f(y)-f(x)\big) \implies df_x(y-x)+o_{t\to 1}(1) \leq f(y)-f(x).$$

Faisant tendre $t$ vers 1, on en déduit

$$df_x(y-x) \leq f(y)-f(x) < 0.$$

La différentielle de $f$ en $x$ ne peut donc pas être nulle.