Chapitre II
Les Matrices

Table des matières

Partie A

Définitions et notations

Activité d'introduction : Math'x Problème 3 page 118.

1. Définition et vocabulaire des matrices

Définition 1.

Soit n, m des entiers naturels non nuls.

Une **matrice de taille n** $\times$ **m** est un tableau de nombres réels (ou même complexes) comportant **n** lignes et **m** colonnes.

Les nombres à l'intérieur d'une matrice sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Exemple 1.

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & \pi & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0,12 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(2, 4)$.

2. Matrices particulières

Définition 2. *Matrices particulières*

— Une **matrice ligne** est une matrice de taille $1\times ?$, i.e. elle ne possède qu'une seule ligne.

> **Exemple :**
> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

— Une **matrice colonne** est une matrice de taille $? \times 1$, i.e. elle ne possède qu'une seule colonne.

> **Exemple :**
> $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice carré d'ordre n** est une matrice de taille $n \times n$, i.e. elle ne possède le même nombre n de lignes et de colonnes.

> **Exemple :**
> $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La **matrice nulle d'ordre n**, notée 0_n, est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple :
$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle d'ordre 3.

3. Notation des coefficients

Notation 1. *Coefficients d'une matrice*

Soit A une matrice de taille $n \times m$ où $n, m \in \mathbb{N}^*$.

On peut alors écrire A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m-1} & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,m-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, les a_{ij} sont les coefficients de la matrices.

On note alors $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$.

Remarque 1. *Égalité entre matrices*

Deux matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$ sont **égales** si, et seulement si, on a les deux conditions suivantes :

i) elles sont de même taille i.e. $n = p$ et $m = q$; et

ii) leurs coefficients sont tous égaux i.e. pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Définition 3. *Diagonale d'une matrice*

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **coefficients diagonaux** de A, les coefficients a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$.

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls en dehors des coefficients diagonaux.

Notation 2. *Matrice identité d'ordre n*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie B

Opérations sur les matrices

1. Addition de deux matrices

Définition 4. *Addition*

Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ et $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ des matrices de **même taille**. On définit la matrice somme $A+B$ de taille $n\times m$ par :

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$$

Autrement dit, on obtient donc la somme de deux matrice de même taille en additionnant coefficient par coefficient.

Exemple 2.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1/2 & 0\\ 1 & -1 & 22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2 & 2+1/2 & 3+0\\ 1+1 & 1-1 & 1+22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5/2 & 3\\ 2 & 0 & 23\end{pmatrix}$$

Proposition 1. *Propriétés de l'addition*

Soit A,B,C des matrices de même taille et $\mathbf{0}$ la matrice nulle de même taille également. On a :

i) $A+B=B+A$;

ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

iii) $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$.

2. Multiplication d'une matrice par un réel

Définition 5.

Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ et α un nombre réel. On définit la matrice αA de même taille que A, par :

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}\,.$$

Autrement dit, on obtient le produit d'une matrice par un réel en multipliant **tous** les coefficients par ce réel.

Exercice 1.

Soit M une matrice de taille $n \times m$ et a, b des réels.

1. Calculer $0M$ et $1M$;
2. Que dire de $(a+b)M$?

Correction.

1. $0M = \mathbf{0}$ et $1M = M$
2. $(a+b)M = aM + bM$.

3. Produit de deux matrices

a. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne de taille $n \times 1$. On définit le produit de A par B par :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}.$$

Exercice 2.

Déterminer les produits de matrices lignes par des matrices colonnes suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ \pi \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Correction.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = 23 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ \pi \\ -5 \end{pmatrix} = 12 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} = -2$$

b. Produit d'une matrice par une autre

Définition 7. *Multiplication*

Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ et $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq q}$ des matrices. On définit la matrice produit $A\times B=AB$ de taille $n\times q$ par :

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq q}$$

Autrement dit, on obtient le coefficient c_{ij} de la matrice AB en effectuant le produit de la ligne i de A par la colonne j de B.

Attention ! La multiplication de la matrice $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ par la matrice $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq q}$ n'est possible que si :

$$\mathbf{m=p}$$

i.e. si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exercice 3.

Calculer, si c'est possible, les produits de matrices suivants :

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&8\\0&5&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&9&0\\4&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&7&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&-1&-3\\2&1&8&5\end{pmatrix}$$

Correction.

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&8\\0&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4&23\\4&-23&11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&9&0\\4&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&7&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=\text{produit impossible}$$

$$\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&-1&-3\\2&1&8&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&23&12\\4&2&16&10\\2&2&7&2\end{pmatrix}$$

Proposition 2. *Propriétés de la multiplication pour les matrices carrées*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et A,B,C des matrices carrées d'ordre $\mathbf{n}$.

i) $(AB)C=A(B\times C)$.

ii) $A(B+C)=AB+AC$

iii) $(\lambda A)B=\lambda AB=A(\lambda B)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Calculer
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$
2. Soit A une matrice carré d'ordre n. Que dire des produits AI_n, I_nA et $A0_n$, 0_nA
3. Soit A une matrice carré d'ordre n et $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$. Que dire des produits AB et BA ?

Correction.

1.
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$
2. On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors on a
$$AB = (\lambda_i a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \text{ et } BA = (\lambda_j a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$$

Remarque 2.

Attention ! Pour deux matrices A, B carrées de même ordre, les produits AB et BA existent tous deux, mais **ne sont pas égaux** ! En général, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. On dit que la multiplication matricielle n'est pas commutative.

c. Puissances d'une matrice carrée

Notation 3. *Puissances d'une matrice carrée*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carré d'ordre n. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note :
$$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ termes}}$$
et on convient que pour $p = 0$, $A^0 = I_n$.

Exercice 5.

1. Calculer, pour $m \in \mathbb{N}^*$,
$$0_n^m \qquad I_n^m \qquad D^m \text{ où } D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$
2. On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En remarquant que $M = A + I_2$, calculer M^5.

Correction.

1. $$0_n^m = 0_n \qquad I_n^m = I_n \qquad D^m = \mathrm{diag}(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m).$$
2. On a $M = A + I_2$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Comme A et I_2 commutent (i.e. $AI_2 = I_2 A$), on peut utiliser la formule du binôme de Newton :
$$M^5 = (A + I_2)^5 = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} A^i I_2^{5-i} = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} A^i.$$
Or on remarque que $A^2 = 0_2$, donc :
$$M^5 = \sum_{i=0}^{1} \binom{5}{i} A^i = \binom{5}{0} A^0 + \binom{5}{1} A^1 = I_2 + 5A.$$
D'où :
$$M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie C

Matrices carrées et résolution de systèmes

1. Matrices inversibles et déterminant

Définition 8. *Matrice inversible*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carré d'ordre n. On dit que A est **inversible**, s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, on note A^{-1} et on appelle **inverse de A** la matrice $A^{-1} = B$.

Exercice 6.

1. Montrer que si A est inversible, alors son inverse est unique (ce qui justifie la notation A^{-1})

2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et le cas échéant, déterminer leurs inverses :
$$I_n \qquad 0_n \qquad \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.

Attention ! Dans une égalité matricielle du type $AB = AC$ on **NE PEUT PAS SIMPLIFIER** par A en général.
Mais si A est inversible, alors la simplification est possible.

Exercice 7.

1. Calculer AB où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Conclure que pour les matrices, un produit est nul n'implique pas qu'un des facteurs l'est !
2. Calculer AB et AC où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Que dire de la simplification par A ?
3. Soit A, B, C des matrices carrées de même taille telle que $AB = BC$. Montrer que si A est inversible, alors $B = C$.

Correction.

— $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque donc qu'un produit de matrices non nulles peut donner la matrice nulle !

— On a $AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = AC$. Or $B \neq C$, donc on ne peut pas simplifier par A.

— On suppose $AB = AC$. Comme A est inversible, on a :
$$B = I_n B = A^{-1}AB = A^{-1}AC = I_n C = C.$$

Définition-Proposition 9. *Déterminant d'une matrice d'ordre 2*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On appelle **déterminant de A** et on note $\det(A)$ la quantité :
$$\det(A) = ad - bc$$
Alors on a les deux cas suivants :

i) Si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

ii) Si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible.

Exercice 8.

Déterminer si la matrice d'ordre 2 suivante est inversible et calculer sont inverse :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction.

On a $\det(A) = 3 \times 2 - 4 \times 1 = 2 \neq 0$ donc A est inversible et :
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2. Application aux systèmes linéaires d'équations

Matrices et systèmes :

On considère le système d'inconnues x_1, x_2, x_3 :
$$(S) \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 & = y_1 \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 & = y_2 \\ gx_1 + hx_2 + ix_3 & = y_3 \end{cases}$$

Alors on remarque que x_1, x_2, x_3 sont solutions de ce système si, et seulement si, on a l'égalité de matrices :

$$AX = Y$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On dira que le système (S) s'écrit sous forme matricielle $AX = Y$ de matrice colonne inconnue X.

Proposition 3.

Un système linéaire de n inconnues et n équations écrit sous forme matricielle $AX = Y$ possède une unique solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si, et seulement si, la matrice A est inversible.

Dans ce cas, la solution X est vérifie :

$$X = A^{-1}Y.$$

Exercice 9.

Résoudre le système suivant en utilisant son écriture sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{3}y & = 3 \\ \frac{-3}{5}x & + & \frac{4}{5}y & = 0 \end{cases}$$

Correction.

Le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{3}y & = 3 \\ \frac{-3}{5}x & + & \frac{4}{5}y & = 0 \end{cases}$$

a pour écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, on remarque que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ est inversible : en effet, on a :

$$\det(A) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} - \left(\frac{-1}{3} \times \frac{-3}{5} \right) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Par suite, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le couple (x, y) est solution du système si, et seulement si, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$X = I_3X = A^{-1}AX = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que l'unique couple (x, y) solution du système est $(12, 5)$.

Partie D

Exercices

Exercice 10.

Finir l'activité p118

Exercice 11.

Exercice 53 p146

Exercices 47 à 60 p146-147

Exercice 12. *Marche aléatoire sur un graphe*

Exercice 40 p144

Voire exercice 5 p129 et 39,42 p144