Chapitre IV

Matrices et suites

Table des matières

Quelques révisions : Math'x 1 à 4 page 154.

Partie A

Exemples de calcul de puissances de matrices

1. Matrices diagonalisables

a. Matrice diagonale

Proposition 1.

Soit $\alpha_1, ..., \alpha_p$ des nombres réels. Si $D = \text{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_p)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \text{diag}(\alpha_1^n, ..., \alpha_p^n).$$

Exemple 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

b. Matrice diagonalisable

Définition 1. *Matrice diagonalisable*

Soit A une matrice carrée. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P de même taille que A telle que :

$$D = P^{-1}AP \text{ est une matrice diagonale.}$$

Remarque 1.

En pratique, sans aucune idée information sur la matrice P, il n'est pas aisé de montrer qu'une matrice donnée est diagonalisable ou non : nous n'avons pas les outils nécessaires pour le faire.

Proposition 2.

Soit A une matrice carrée diagonalisable où $D = P^{-1}AP$ est diagonale. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable en considérant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et calculer A^{10}.

Correction.

1. On a $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ d'où :
$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Donc A est diagonalisable car D est diagonale.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$A^{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^{10} + 2^{10} & (-1)^{10} - 2^{10} \\ (-1)^{10} - 2^{10} & (-1)^{10} + 2^{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1024 & 1-1024 \\ 1-1024 & 1+1024 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512,5 & -511,5 \\ -511,5 & 512,5 \end{pmatrix}$$

Voire exercice résolu 2 p161 et 7 p174

2. Puissance d'une somme de matrices qui commutent

Proposition 3.

Soit A, B deux matrices carrées de même taille. Si A et B commutent i.e. $AB = BA$, alors
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exercice 2.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$.

Voire exercice résolu 2 p161 et 7 p174

Partie B

Suites de matrices

1. Suites numériques arithmético-géométriques

Définition 2.

Soit a, b est nombres réels. On appelle suite **arithmético-géométrique** ou suite **à récurrence affine**, une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Exemple 2.

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est une suite arithmético-géométrique.

— **Cas particuliers :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

- Si $a = 1$, $u_{n+1} = u_n + b$. Il s'agit donc d'une suite **arithmétique**. Son expression explicite est, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = u_0 + nb.$$
- Si $b = 0$, $u_{n+1} = au_n$. Il s'agit donc d'une suite **géométrique**. Son expression explicite est, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = a^n u_0.$$

Expression explicite d'une suite arithmético-géométrique

Soit a, b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on cherche à exprimer u_n en fonction de n et u_0.
Si $a = 1$, la suite est arithmétique et $u_n = u_0 + nb$. Sinon, si $a \neq 1$:

1. On résout l'équation $x = ax + b$. On note $c = \dfrac{b}{1-a}$ l'unique solution et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = u_n - c$
2. On montre que (x_n) est une suite géométrique de raison a et ainsi, $x_n = a^n x_0$.
3. On conclut alors $u_n = x_n + c = a^n x_0 + c = a^n(u_0 - c) + c$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Exercice 3.

Déterminer la formule explicite de la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On résout $x = 2x + 1$: l'unique solution est $c = -1$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = u_n - c = u_n - (-1) = u_n + 1.$$

On remarque que $x_0 = u_0 + 1 = 1 + 1 = 2$.

2. On vérifie que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique (sinon, on s'est trompé dans notre précédent calcul !). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2x_n.$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison 2 et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = 2^n x_0 = 2^n \times 2 = 2^{n+1}.$$

3. Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n = x_n - 1$:

$$u_n = x_n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Il s'agit de la suite des nombres de Mersenne ! (En partant de M_1).

Exercice 4.

Déterminer la formule explicite de la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = -u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On résout $x = -x + 4$: l'unique solution est $c = 2$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = u_n - c = u_n - 2.$$

On remarque que $x_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$.

2. On vérifie que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = u_{n+1} - 2 = (-u_n + 4) - 2 = -u_n + 2 = -(u_n - 2) = -x_n.$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison -1 et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = (-1)^n x_0 = (-1)^n \times 1 = (-1)^n.$$

3. Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n = x_n + 2$:

$$u_n = x_n + 2 = (-1)^n + 2$$

Il s'agit de la suite qui alterne entre les valeurs 3 et 1 :

$$3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, \dots$$

Exercice 5. *Autre méthode de détermination d'une expression explicite*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   a. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0.$$

2. En utilisant la formule de la somme d'une suite géométrique (considérer séparément les cas $a = 1$ et $a \neq 1$) et en exprimant v_0 en fonction de u_0 uniquement, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a^n u_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) b.$$

2. Suites récurrentes affines de matrices colonnes

a. Définition et exemples

Définition 3.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, A un matrice carrée d'ordre p et B une matrice colonne à p lignes. On appelle suite **récurrente affine de matrices colonnes**, une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes à p lignes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

Exemple 3.

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes à 2 lignes telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est une suite récurrente affine.

Exercice 6. *Cas particuliers*

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente affine de matrice colonnes à p lignes où $U_{n+1} = AU_n + B$. Déterminer une expression explicite de U_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et U_0 dans les deux cas suivants :

a) $A = I_p$ b) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Correction.

a) On suppose $A = I_p$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_n - U_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k)\,.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1} - U_k = U_k + B - U_k = B$, donc :

$$U_n - U_0 = \sum_{k=0}^{n-1} B = nB.$$

d'où finalement

$$U_n = U_0 + nB.$$

b) On suppose que B est la colonne nulle à p lignes. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. On remarque que $U_1 = AU_0$, puis $U_2 = AU_1 = A^2U_0$, puis $U_3 = AU_2 = A^3U_0$; ce qui nous amène à conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^nU_0.$$

Montrons que cette conjecture est vraie par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$.

— **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $U_0 = I_pU_0 = A^0U_0$. La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $U_n = A^nU_0$. On a :

$$U_{n+1} = AU_n \underbrace{=}_{\text{hyp. rec.}} A \times (A^nU_0) = A^{n+1}U_0.$$

Par suite, la propriété est vraie au rang $n + 1$. Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

Ainsi, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$.

b. Expression explicite d'une suite récurrente affine

On s'inspire directement du cas des suites arithmético-géométriques pour déterminer une expression explicite d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente affine de matrices colonnes à p lignes où $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 1 : cas où $I_p - A$ est inversible.

1. On résout l'équation $X = AX + B$. On note $C = (I_p - A)^{-1}B$ son unique solution (unique car $I_p - A$ est inversible) et on considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $X_n = U_n - C$
2. On montre que (X_n) est une suite de matrices colonnes vérifiant $X_{n+1} = AX_n$ et ainsi, par récurrence, $X_n = A^nX_0$.
3. On conclut alors $U_n = X_n + C = A^nX_0 + C = A^n(U_0 - C) + C$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A^n \left(U_0 - (I_p - A)^{-1}B\right) + (I_p - A)^{-1}B.$$

Méthode 2 : cas général (désavantage, il faut connaitre la formule!). On peut montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ (par analogie avec l'exercice 5) que :

$$U_n = A^n U_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) B.$$

3. Exemples pratiques

Exercice 7.

Donner une expression explicite de la suite récurrent affine $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes à 2 lignes telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$