Correction du Devoir Surveillé n°1

1. Questions de cours

Exercice 1.

Compléter la définition suivante :

> Soit m un entier naturel non nul et a, b des entiers relatifs.
> On dit que a **est congru à** b **modulo** m et on note :
>
> $$a \; b.....$$
>
> si a et b ont ....
>
> ....

Correction.

> Soit m un entier naturel non nul et a, b des entiers relatifs.
> On dit que a **est congru à** b **modulo** m et on note :
>
> $$a \equiv b \bmod m$$
>
> si a et b ont le même reste dans leur division euclidienne par m.

Exercice 2.

Soit a, b et d des entiers relatifs.

1. Rappeler la définition de d divise a.
2. Montrer que si d divise a et d divise b, alors d divise $a + b$.

Correction.

1. d divise a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kd$.
2. On suppose que d divise a et d divise b. Montrons que d divise $a + b$.
   Comme d divise a, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kd$ et comme d divise b, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel

que $b = k'd$. Ainsi, on a :

$$a + b = kd + k'd = \underbrace{(k + k')}_{\in \mathbb{Z}} d.$$

Par suite, d divise $a + b$.

2. Exercices types

Exercice 3.

Déterminer tous les entiers **relatifs** n tels que $3n + 8$ divise $5n + 2$.

Correction.

On suppose que $3n + 8$ divise $5n + 2$. Comme, de plus, $3n + 8$ divise $3n + 8$, $3n + 8$ divise la combinaison linéaire :

$$5(3n + 8) - 3(4n + 2) = 15n + 40 - 15n - 6 = 34.$$

Ainsi, $3n + 8$ divise 34. Or 34 admet huit diviseurs dans $\mathbb{Z}$:

$$-34, -17, -2, -1, 1, 2, 17, 34.$$

Par suite, on a les possibilités suivantes :
- $3n + 8 = -34$ ce qui implique $n = -14$.
- $3n + 8 = -17$ ce qui implique $n = -\dfrac{25}{3}$. Impossible !
- $3n + 8 = -2$ ce qui implique $n = -\dfrac{10}{3}$. Impossible !
- $3n + 8 = -1$ ce qui implique $n = -3$.
- $3n + 8 = 1$ ce qui implique $n = -\frac{7}{3}$. Impossible !
- $3n + 8 = 2$ ce qui implique $n = -2$.
- $3n + 8 = 17$ ce qui implique $n = 3$. Impossible !
- $3n + 8 = 34$ ce qui implique $n = \dfrac{26}{3}$. Impossible !

Ainsi, les quatre solutions potentielles sont $n = -14, -3, -2$ et 3. On vérifie alors que ces valeurs conviennent bien :

- $3 \times (-14) + 8 = -34$ divise $-68 = 5 \times (-14) + 2$ donc $n = -14$ est bien solution ;
- $3 \times (-3) + 8 = -1$ divise $-13 = 5 \times (-3) + 2$ donc $n = -3$ est bien solution ;
- $3 \times (-2) + 8 = 2$ divise $-8 = 5 \times (-2) + 2$ donc $n = -2$ est bien solution ;
- $3 \times 3 + 8 = 17$ divise $17 = 5 \times 3 + 2$ donc $n = 3$ est bien solution.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel. Pour quelle(s) valeur(s) de n, le reste de la division euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2 est $3n+1$?

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^2(n+3) + 3n + 1.$$

Ainsi, $3n+1$ est le reste de la division euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2 si, et seulement si, $0 \leq 3n+1 < n^2$.
Or on a $x^2 - 3x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$ où :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Par suite, $x^2 - 3x - 1 > 0$ si, et seulement si, $x \in] - \infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.
Ainsi, l'entier naturel n vérifie $3n+1 < n^2$ si, et seulement si, $n \in]x_2, +\infty[$ car x_1 est négatif.
De plus, $3 < x_2 < 3,5$ donc $3n+1$ est le reste de la division euclidienne de $(n+1)^3$ si, et seulement si $n \geq 4$.

3. Exercices

Exercice 5.

Compléter les congruences suivantes avec **le plus petit entier naturel** possible :

$$16 \equiv \ldots\ldots\ldots \mod 9 \qquad 43 \equiv \ldots\ldots\ldots \mod 11 \qquad 1221 \equiv \ldots\ldots \mod 4$$

$$83 + 90001 \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mod 9$$

$$127 \times 63 \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mod 5$$

$$241 \times 599 + 66 \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mod 6$$

Correction.

Compléter les congruences suivantes avec **le plus petit entier naturel** possible :

$$16 \equiv 7 \mod 9 \qquad 43 \equiv 10 \mod 11 \qquad 1221 \equiv 1 \mod 4$$

$$83 + 90001 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \mod 9$$

$$127 \times 63 \equiv 2 \times 3 \equiv 6 \equiv 1 \mod 5$$

$$241 \times 599 + 66 \equiv 1 \times (-1) + 0 \equiv -1 \equiv 5 \mod 6$$

Exercice 6.

Aujourd'hui, 16 Novembre 2017, nous sommes un Jeudi.

1. Déterminer quel sera le jour de la semaine lors du 16 Novembre 2099.
2. Déterminer quel était le jour de la semaine lors du 16 Novembre 1773.

Correction.

1. On cherche le nombre de jours écoulés entre le 16 Novembre 2017 et le 16 Novembre 2099.

   Entre ces deux dates, il y a eu $2099 - 2017 = 82$ années. Combien d'entre elles étaient bissextiles ?

   — Le nombre d'années entre 2017 (non inclus) et 2099 (inclus) dont le millésime est un multiple de 4 est :
   $$E(2099/4) - E(2017/4) = 524 - 504 = 20.$$

   — Le nombre d'années entre 2017 (non inclus) et 2099 (inclus) dont le millésime est un multiple de 100 est :
   $$E(2099/100) - E(2017/100) = 20 - 20 = 0.$$

   — Le nombre d'années entre 2017 (non inclus) et 2099 (inclus) dont le millésime est un multiple de 400 est :
   $$E(2099/400) - E(2017/400) = 5 - 5 = 0.$$

   Ainsi, on obtient le nombre d'années bissextiles (multiples de 4 moins multiples de 100 plus multiples de 400) :

   $$20 + 0 - 0 = 20 \text{ années bissextiles entre le 16 Novembre 2017 et le 16 Novembre 2099.}$$

   Par suite, le nombre de jours J écoulés entre les deux dates est égal au nombre de jours dans une année (365) fois le nombre d'années (82) auquel on ajoute un jour par année bissextile (donc 20 jours) et donc :
   $$\begin{array}{rcll} J & \equiv & 365 \times 82 + 20 & \mod 7 \\ J & \equiv & 1 \times 5 + 6 & \mod 7 \\ J & \equiv & 11 & \mod 7 \\ J & \equiv & 4 & \mod 7 \end{array}$$

   Ainsi, le reste de la division euclidienne du nombre J de jours entre les deux dates est égal à 4, il y a donc un décalage de 4 jours de la semaine entre le Jeudi 16 Novembre 2017 et le "Indéterminé" 16 Novembre 2099.

   Donc :
   $$\text{Jeudi} \rightarrow \underbrace{\text{Vendredi}}_{1} \rightarrow \underbrace{\text{Samedi}}_{2} \rightarrow \underbrace{\text{Dimanche}}_{3} \rightarrow \underbrace{\text{Indéterminé}}_{4}.$$

   Il en résulte que le 16 Novembre 2099 sera un **Lundi**.

2. On cherche le nombre de jours écoulés entre le 16 Novembre 1773 et le 16 Novembre 2017.

   Entre ces deux dates, il y a eu $2017 - 1773 = 244$ années. Combien d'entre elles étaient bissextiles ?

— Le nombre d'années entre 1773 (non inclus) et 2017 (inclus) dont le millésime est un multiple de 4 est :

$$E(2017/4) - E(1773/4) = 504 - 443 = 61.$$

— Le nombre d'années entre 2017 (non inclus) et 2099 (inclus) dont le millésime est un multiple de 100 est :

$$E(2017/100) - E(1773/100) = 20 - 17 = 3.$$

— Le nombre d'années entre 2017 (non inclus) et 2099 (inclus) dont le millésime est un multiple de 400 est :

$$E(2017/400) - E(2017/400) = 5 - 4 = 1.$$

Ainsi, on obtient le nombre d'années bissextiles (multiples de 4 moins multiples de 100 plus multiples de 400) :

$$61 + 3 - 1 = 59 \text{ années bissextiles entre le 16 Novembre 1773 et le 16 Novembre 2017.}$$

Par suite, le nombre de jours J écoulés entre les deux dates est égal au nombre de jours dans une année (365) fois le nombre d'années (244) auquel on ajoute un jour par année bissextile (donc 59 jours) et donc :

$$\begin{array}{ccc} J & \equiv & 365 \times 244 + 59 & \mod 7 \\ J & \equiv & 1 \times 6 + 3 & \mod 7 \\ J & \equiv & 9 & \mod 7 \\ J & \equiv & 2 & \mod 7 \end{array}$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne du nombre J de jours entre les deux dates est égal à 2, il y a donc un décalage de 2 jours de la semaine entre le "Indéterminé" 16 Novembre 1773 et le Jeudi 16 Novembre 2017.
Donc :

$$\text{Indéterminé} \rightarrow \underbrace{\text{Indéterminé} + 1}_{1} \rightarrow \underbrace{\text{Jeudi}}_{2}.$$

Il en résulte que le 16 Novembre 1773 était un **Mardi**.

Problème 1. *Code d'une carte de crédit*

Jean-Pierre est tête en l'air, il a une nouvelle fois oublié le code de sa carte bancaire. Heureusement, il a un moyen mnémotechnique (et mathématiques) pour le retenir. Son code, de **quatre** chiffres, vérifie les propriétés suivantes :

— si on ajoute le code départemental du Loiret à son code, on obtient un carré parfait (i.e. un nombre entier au carré) ;

— si on retranche le code départemental de la Dordogne à son code, on obtient également un carré parfait.

Pouvez-vous aider Jean-Pierre et déterminer le code de sa carte bancaire ?

Correction.

On note $c \in \mathbb{N}$ le code à 4 chiffres de la carte bancaire. D'après l'énoncé, il existe m et n des entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} c + 45 & = m^2 \\ c - 24 & = n^2 \end{cases}$$

Ainsi, si on soustrait la deuxième relation à la première, on obtient la condition suivante sur m et n :

$$69 = 45 - (-24) = c + 45 - (c - 29) = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n).$$

Comme $m + n$ et $m - n$ sont des entiers naturels (on peut remarquer que $m \geq n$), ce sont des diviseurs positifs de 69 i.e. $1, 3, 23$ ou 69.

De plus, en remarquant que $m + n \geq m - n$, on obtient les possibilités suivantes :

$$\begin{cases} m + n & = 23 \\ m - n & = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m + n & = 69 \\ m - n & = 1 \end{cases}$$

d'où les solutions potentielles suivantes :

$$(1) \begin{cases} m & = 13 \\ n & = 10 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2) \begin{cases} m & = 35 \\ n & = 34 \end{cases}$$

Par suite, en utilisant la relation $c = m^2 - 45$, on obtient :

— Dans le cas (1) : $c = 13^2 - 45 = 169 - 45 = 124$. Ce qui est impossible puisque que c possède 4 chiffres.

— Dans le cas (2) : $c = 35^2 - 45 = 1225 - 45 = 1180$.

Il en résulte que le code de la carte bancaire de Jean-Pierre est 1180.