Correction du Devoir Surveillé n°2

1. Questions de cours

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

1. Compléter la définition suivante :

> On note $\det(A)$ et on appelle .... de A la quantité :
>
> $$\det(A) = \text{...................................}$$

2. Pour quelles valeurs de $\det(A)$, la matrice A est-elle inversible ? Dans ce cas, donner une expression de A^{-1} en fonction des coefficients de A et de $\det(A)$.

Correction.

1. > On note $\det(A)$ et on appelle **déterminant** de A la quantité :
   >
   > $$\det(A) = ad - bc$$

2. Si $\det(A) \neq 0$ alors la matrice A est inversible (et réciproquement). Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Déterminer le résultat des opérations suivantes :

1. $$3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$$

Correction.

1. $3\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\left(3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$
$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$
$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

2. $$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 7 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Exercices types

Exercice 3.

Résoudre le système suivant en utilisant son écriture sous forme matricielle :

$$\begin{cases}\frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}y = 2\\ \frac{2}{3}x + \frac{-1}{3}y = 5\end{cases}$$

Correction.

Le système est équivalent au produit matriciel :

$$\begin{pmatrix}\frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$$

De plus, si on note $A=\begin{pmatrix}\frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}$, on remarque que $\det(A)=\frac{-1}{3}\frac{-1}{3}-\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}\neq 0$. Par suite, A est inversible, et on a :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}\frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Par suite, on a : $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow I_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Il en résulte que le couple $(12, 9)$ est l'unique solution du système.

Exercice 4.

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de 3724^{1235} par 9.

Correction.

1. On a : $7^1 = 7 \equiv 7 \mod 9$; $7^2 = 49 \equiv 4 \mod 9$ et $7^3 = 7^2 \times 7 \equiv 4 \times 7 = 28 \equiv 1 \mod 9$, donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$7^n \equiv \begin{cases} 7 & \text{si } n \equiv 1 \mod 3 \\ 4 & \text{si } n \equiv 2 \mod 3 \\ 1 & \text{si } n \equiv 0 \mod 3 \end{cases}$$
2. On a $3724 \equiv 7 \mod 9$, donc :
$$3724^{1235} \equiv 7^{1235} = 7^{411\times 3+2} \equiv 4 \mod 9.$$

3. Exercices

Exercice 5.

1. Déterminer **le plus petit entier naturel** k tel que :
$$5k \equiv 1 \mod 6.$$
2. En utilisant la question précédente, déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tel que :
$$5x + 4 \equiv 3 \mod 6.$$
3. En déduire la liste les entiers x compris entre 50 et 100 (inclus) tels que :
$$5x + 4 \equiv 3 \mod 6.$$

Correction.

1. On a $5 \times 5 = 25 \equiv 1 \mod 6$ et pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4, on remarque que $5k \not\equiv 1 \mod 6$. Par suite, 5 est le plus petit entier naturel k tel que

$$5k \equiv 1 \mod 6.$$

2. On a : $5x + 4 \equiv 3 \mod 6$.
$\Leftrightarrow 5x \equiv 3 - 4 \mod 6$.
$\Leftrightarrow 5x \equiv -1 \mod 6$.
$\Leftrightarrow 5 \times 5x \equiv 5 \times (-1) \mod 6$.
$\Leftrightarrow x \equiv -5 \mod 6$.
$\Leftrightarrow x \equiv 1 \mod 6$.
$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 1 + 6k$.
Ainsi, l'ensemble des entiers relatifs solutions de $5x + 4 \equiv 3 \mod 6$ est $\{x = 1 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a :
$50 \leq 1 + 6k \leq 100$
$\Leftrightarrow 49 \leq 6k \leq 99$
$\Leftrightarrow \frac{49}{6} \leq k \leq \frac{99}{6}$
$\Leftrightarrow 9 \leq k \leq 16$ car k est un entier.
Par suite, les entiers x compris entre 50 et 100 tels que $5x + 4 \equiv 3 \mod 6$ sont :

$$1 + 6 \times 9 = 55; \quad 1 + 6 \times 10 = 61; \quad 1 + 6 \times 11 = 67; \quad 1 + 6 \times 12 = 73;$$

$$1 + 6 \times 13 = 79; \quad 1 + 6 \times 14 = 85; \quad 1 + 6 \times 15 = 91 \text{ et } 1 + 6 \times 16 = 97.$$

Problème 1.

Dans une ferme typiquement solognote, un fermier élève tendrement trois espèces d'animaux. Il possède des taureaux, des autruches et des licornes. Toutes ses magnifiques bêtes courent gaiement dans le même enclos en parfaite harmonie.
Le fermier s'ennuie fermement : il alors de s'amuser un peu en comptant ses animaux d'une manière inhabituelle. Dans son enclos, il dénombre :

— 164 pattes ;
— 57 cornes et
— 92 yeux.

On note x le nombre d'autruches, y le nombre de taureaux et z le nombre de licornes.

1. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 3 telle que :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164 \\ 57 \\ 92 \end{pmatrix}$$

2. Soit α un réel. On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \alpha & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB.

3. En choisissant judicieusement une valeur de α, en déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

4. Déterminer le nombre d'autruches, le nombre de vaches et le nombre de licornes du fermier.

Correction.

1. — Les autruches possèdent 2 pattes, les taureaux 4 pattes et les licornes 4 pattes ;
   — Les autruches n'ont pas de corne, les taureaux ont 2 cornes et les licornes 1 corne ;
   — Les autruches possèdent 2 yeux, les taureaux 2 yeux et les licornes 2 yeux.

   Ainsi, les nombres x, y et z vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z & = 164 \\ 2y + z & = 57 \\ 2x + 2y + 2z = 92 \end{cases}$$

   ce qui équivaut à l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164 \\ 57 \\ 92 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \alpha & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

3. On remarque que pour $\alpha = 0$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. Par suite, A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. En multipliant par A^{-1} l'égalité matricielle $AX = Y$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 164 \\ 57 \\ 92 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 164 \\ 57 \\ 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-164}{2} + 92 \\ \frac{-164}{2} + 57 + \frac{92}{2} \\ 164 - 57 - 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

   Par suite, le fermier possède :
   — 10 autruches ;
   — 21 taureaux ;
   — 15 licornes.