Devoir Maison n°3

Problème 1. *Étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7, 4)*

On rappelle qu'un **bit** est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.
On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.
Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.

On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

— c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
— c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
— c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires
   (a) Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
   (b) Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.
2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
   Démontrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :
   - la valeur de c_1 est inchangée ;
   - la valeur de c_2 est modifiée ;
   - la valeur de c_3 est modifiée.
3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.
   Sans justification, recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.
5. Voici deux messages de 7 bits :

$$A = 0100010 \quad \text{et} \quad B = 1101001.$$

   On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission.
   Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.

Problème 2.

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point appartenant au plan P et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
   (a) Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation
   $(E) : 2x + 3y = 11$.
   (b) Justifier que le couple $(7\ ;\ -1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.
   (c) Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan P et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.
2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels.
   Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.
   (a) Montrer que y est impair.
   (b) Montrer que : $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$.
   (c) On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
   Montrer que le point $M(x\ ;\ y;\ z)$ appartient au plan P si et seulement si $p+q+r = 1$.
   (d) En déduire qu'il existe exactement trois points du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.